ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 21 | Oktober 1941 | Heft 5

Inhalt:

Seite

Hauptaufsätze. H. Reichardt: Über eine neue Theorie der freien Turbulenz 257
W. Schmidt: Turbulente Ausbreitung eines Stromes erhitzter Luft (I. Teil) 265
H. Görtler: Einfluß der Bodentopographie auf Strömungen über der rotierenden Erde 279
H. Heinrich: Zur rechnerischen Auflösung einer Gleichung vierten Grades 304

Kleine Mitteilungen. W. Tollmien: Ergänzung zur Theorie der Grenzlinien adiabatischer Potentialströmungen 308
H. v. Schulmann: Die Grundgleichungen der Segeltheorie unter Berücksichtigung der Segelneigung in Längs- und Querrichtung 308
C. Weber: Über genäherte Lösungen von Differentialgleichungen mit Hilfe von Minimalansätzen . 310
O. Hofmann: Neuer Beweis des Entwicklungssatzes der Vektoralgebra 311
R. Sauer: Linearverbindung kompressibler ebener Strömungsfelder 312
H. Knobloch: Funktionsgewichte in der Ausgleichsrechnung 315

Seite

Buchbesprechungen. Festschrift der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg zu ihrem 250jährigen Bestehen 1940. — Blaschke: Mathematik und Leben. — Grünagel: Flüssigkeitsbewegung in umlaufenden Radialrädern. — Hilal: Beiträge zur Theorie und Berechnung von Balkenbrücken aus Eisenbeton. — Pistor, Oppermann, Passer, v. Emperger und Kleinlogel: Vorspannung im Eisenbetonbau, Grundlagen, Ziel, Zweck und Anwendung. — Tiedemann: Über Bodenuntersuchungen bei Entwurf und Ausführung von Ingenieurbauten. — Briegleb: Atome und Ionen. — Möller: Grundlagen und mathematische Hilfsmittel der Hochfrequenztechnik. — Joos und Kaluza: Höhere Mathematik für den Praktiker. — Emde: Tafeln elementarer Funktionen. — Rohrbeck: Grund- und Zeitfragen der Versicherungswirtschaft und Versicherungswissenschaft. — Pesonen: Messungen der Grundlinien Örebro und Värnamo in Schweden im Jahre 1938. — Tafeln zur Übertragung geographischer Koordinaten auf dem internationalen Erdellipsoide im Bereich 35° bis 71° Breite. — Weiter eingegangene Bücher 317
Nachrichten 320

HAUPTAUFSÄTZE

Über eine neue Theorie der freien Turbulenz.

Von *H. Reichardt* in Göttingen.

(Aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung.)

Impulsmessungen in turbulenten Vermischungsgebieten zeigen, daß zwischen den turbulenten und den molekularen Ausgleichsvorgängen eine Analogie besteht, die eine sinngemäße Anwendung der Differentialgleichung der Wärmeleitung auf die turbulente Impulsausbreitung ermöglicht. Diese Tatsache bildet die Grundlage einer neuen phänomenologischen Theorie der freien turbulenten Strömungen.

1. Leistung und Grenzen der bisherigen Theorie des Mischungsweges.

Während die Molekulartheorie von bestimmten Voraussetzungen ausgehen kann, weil die Elemente ihrer Statistik, die Moleküle, vorgegeben sind, ist die Turbulenztheorie in der schwierigen Lage, daß sie zunächst keine sichere Grundlage hat, auf der sie eine Statistik aufbauen kann. Denn die Elementarteile der Turbulenz, die Wirbelballen, sind sehr wechselvolle Gebilde, die sich in schwer erkennbarer Weise gegenseitig beeinflussen. Man kann daher die Ergebnisse oder die Methoden der Molekularphysik nicht ohne weiteres auf die Turbulenzmechanik übertragen.

Trotz beträchtlicher Unterschiede haben aber die molekularen und die turbulenten Vorgänge doch wesentliche Züge gemeinsam. Beispielsweise besteht eine Ähnlichkeit in der Schubübertragung. In beiden Fällen kommt die Schubspannung dadurch zustande, daß Elementarteile mit einem bestimmten Impulsinhalt der Hauptgeschwindigkeit durch eine Querbewegung um eine „freie Weglänge" in eine neue Umgebung mit anderer Hauptgeschwindigkeit gelangen und dort durch Stoß bzw. Vermischung ihren Impulsüberschuß an die benachbarten Teile abgeben oder sie durch ihren kleineren Impuls bremsen.

Es ist daher naheliegend, den molekularen Begriff der freien Weglänge sinngemäß auf die turbulente Austauschbewegung zu übertragen und diese Größe zur Darstellung der turbulenten Scheinreibung zu verwenden. In der Tat ist aus solchen Überlegungen heraus ein der freien Weglänge entsprechender Begriff, der sogenannte Prandtlsche Mischungsweg, für die

Turbulenz definiert worden[1]). Dieser Prandtlsche Mischungsweg hat erstmalig die rechnerische Behandlung turbulenter Strömungen ermöglicht.

Auf Grund der Vorstellung, daß ein Wirbelballen einen gewissen Weg l' ohne Vermischung mit seiner Umgebung zurücklegt, erhält Prandtl für die Schwankungsgeschwindigkeiten u' (in der Hauptströmungsrichtung) und v' (in der Querrichtung) die Ausdrücke

$$u' \sim l'_u \frac{d\bar{u}}{dy}, \qquad v' \sim l'_v \frac{d\bar{u}}{dy}$$

und somit für die turbulente Scheinreibung $\tau = \varrho \overline{u'v'}$ den Ansatz

$$\tau = \varrho\, l^2 \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right| \frac{d\bar{u}}{dy} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Hier ist $\bar{u}$ die mittlere Geschwindigkeit in der Hauptströmungsrichtung x, y die Querrichtung, in der der Austausch erfolgt, ϱ die Dichte des Mediums und l der aus der Mittelwertsbildung von l'_u und l'_v hervorgegangene Begriff des Mischungsweges.

Um die Berechnung der mittleren Geschwindigkeit einer turbulenten Strömung durchführen zu können, bedarf es noch geeigneter Aussagen für die Größe l. Hier war es nötig, sich auf die Erfahrungstatsachen zu stützen, die den Weg zu brauchbaren Ansätzen lieferten.

Die Theorie des Mischungsweges ist seit ihrer ersten Formulierung im Jahre 1925 in zahlreichen Fällen angewendet worden, was schon rein äußerlich in einer umfangreichen Literatur zum Ausdruck kommt. Diese Untersuchungen beziehen sich teils auf die wandnahen Strömungen, hauptsächlich aber auf die turbulenten Ausbreitungsvorgänge ohne Behinderung durch Wände. Diese Vorgänge der sogenannten freien Turbulenz sind nämlich wegen ihrer relativen Einfachheit noch verhältnismäßig leicht zu behandeln.

Die bisherigen Leistungen der Mischungswegtheorie lassen sich etwa wie folgt kurz umreißen: In zahlreichen Fällen wurde die mittlere Strömungsbewegung näherungsweise berechnet. Das in Reibungsschichten auftretende logarithmische Geschwindigkeitsprofil konnte erklärt werden. Auf dem Gebiete der freien Turbulenz ist es gelungen, die beobachteten Gesetzmäßigkeiten der Ausbreitung der Vermischungsgebiete in der Hauptströmungsrichtung in den Hauptzügen richtig wiederzugeben.

Die bisherigen Ergebnisse sind aber nicht derart verbindlich, daß sie nicht auch anders erklärt werden könnten. Man kann daher nicht eigentlich sagen, der Mischungswegbegriff habe eine Bestätigung durch die Erfahrung gefunden und es sei durch ihn ein wesentlicher Einblick in die Turbulenzstruktur erfolgt. Im einzelnen ergeben sich hier folgende Einwände.

Die Untersuchungen beziehen sich ausschließlich auf die Berechnung der mittleren Geschwindigkeiten und deren Vergleich mit den gemessenen Mittelwerten. Diese Mittelwertsuntersuchungen sind aber allein nicht ausreichend für die Bestimmung einer Größe, die für die Struktur der Turbulenz kennzeichnend sein soll. Eine Klärung des Mischungswegbegriffes wird daher wesentlich von Schwankungsuntersuchungen abhängen, die den Zusammenhang zwischen den Schwankungsgrößen und den Mittelwerten zum Gegenstand haben.

Aber auch die bisher durchgeführten Mittelwertsuntersuchungen standen von vornherein im Zeichen einer grundsätzlichen Schwierigkeit. Der ursprüngliche Ansatz (1) führt nämlich zu Geschwindigkeitsprofilen, die verglichen mit den gemessenen Profilen in den Maxima wesentlich zu spitz sind (vor allem zeigen Geschwindigkeitsgradient und zweite Ableitung, daß der Verlauf der gerechneten Profile nicht richtig sein kann). Für eine physikalisch befriedigende Darstellung turbulenter Profile wurde deshalb von Prandtl schon in seiner ersten Veröffentlichung[2]) ein komplizierterer Ausdruck vorgeschlagen, der die Form hat

$$\tau = \varrho\, l^2 \frac{d\bar{u}}{dy} \left(\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2 + l_1^2 \left(\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Durch diesen Ausdruck wird außer dem eigentlichen Mischungsweg l noch eine zweite Mischungslänge l_1 definiert. Da der erweiterte Ansatz zwei zur freien Verfügung stehende Größen enthält, kann sich die Theorie den Experimenten besser anpassen. Tatsächlich ist es in einzelnen Fällen gelungen (wenn auch unter großem mathematischem Aufwand), mit dem Ansatz (2) wirklichkeitsgetreue Profile zu berechnen.

Physikalisch betrachtet ist allerdings das Verfahren mit zwei freien, den jeweiligen Bedürfnissen angepaßten Größen zu arbeiten, wenig befriedigend. Ist es schon nicht leicht, die Bedeutung des Weges l klar zu erkennen, so erscheint die aus weiteren qualitativen Überlegungen eingeführte Länge l_1 noch schwerer deutbar. Es drängt sich daher die Frage auf, ob man auf dem bisherigen Wege physikalisch überhaupt weiterkommen kann.

[1]) L. Prandtl: Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz. Z. angew. Math. Mech. Bd. 5 (1925), S. 136.

[2]) Siehe Fußnote 1, S. 2.

2. Die Zweckmäßigkeit der induktiven Methode.

Als eine wesentliche Ursache für die derzeitige Lage der Theorie erscheint dem Verfasser die bisherige Überbewertung der deduktiven Betrachtungsweise in der Turbulenzforschung. Der theoretische Hydrodynamiker ist gewohnt, von den Bewegungsgleichungen als einem physikalisch gesicherten Fundament auszugehen. Für große Teile der Hydrodynamik ist dies sicher berechtigt. Auf vielen Gebieten ist die Theorie bestimmt richtig, wenn sie sich mathematisch durchführen läßt. Bei der Lösung schwieriger Aufgaben, die nur näherungsweise zu bewältigen sind, braucht man zwar häufig experimentelle Daten. Diese sind dann aber doch organisch in eine an sich zuverlässige Theorie eingebaut.

Ganz anders dagegen liegen die Verhältnisse in der Turbulenzforschung. Hier hat man so gut wie keine theoretischen Grundlagen. Diese Grundlagen sollen ja erst geschaffen werden. Man ist daher im wesentlichen auf die Aussagen des Experimentes angewiesen. Trotzdem besteht auch hier die Tendenz, die Theorie auf Grund allgemeiner Annahmen deduktiv zu entwickeln, was auf das Erproben hypothetischer Ansätze hinausläuft. Diese Arbeit des Anpassens eines Ansatzes an die experimentellen Tatsachen ist aber dadurch erschwert, daß zwischen dem Ansatz und dem Experiment die ganze, zumeist komplizierte Rechnung liegt, die bei jeder Abänderung der Voraussetzung wieder von neuem durchgeführt werden muß.

Zweckmäßiger dagegen erscheint für eine aus der Erfahrung schöpfende Turbulenzforschung das induktive Verfahren einer unmittelbaren Fundierung der Theorie auf den Versuchsergebnissen. Wenn es gelingt, die tatsächlichen Vorgänge mathematisch darzustellen, so erhält man durch Umkehrung des bisherigen Rechnungsganges bestimmt den richtigen „Ansatz".

Natürlich hat auch das induktive Verfahren seine Schwierigkeiten. Denn man muß durch die streuenden Meßpunkte die „richtigen" Kurven legen. Dabei sind die Meßfehler sowie die Einflüsse überlagerter Effekte höherer Ordnung (die in einem noch wenig erforschten Gebiet zunächst gar nicht interessieren) richtig abzuschätzen. Diese Aufgabe, innerhalb des Rahmens einer unvermeidbaren Unsicherheit die wesentliche Gesetzmäßigkeit aus den verschiedensten Meßergebnissen herauszufinden, ist aber verhältnismäßig einfach zu lösen, wenn es gelingt, durch eine Gesamtschau der Erscheinungen zu einer brauchbaren Hypothese zu gelangen.

Man kann also auch bei rein phänomenologischem Vorgehen nicht ganz auf spekulative Betrachtungen verzichten. Gegenüber der deduktiven Methode besteht aber der grundsätzliche Unterschied, daß sich die idealisierenden Annahmen direkt auf die Meßergebnisse beziehen. Dadurch wird eine unmittelbare Kontrolle von Hypothesen möglich.

3. Über die Möglichkeit eines Vergleiches zwischen den molekularen und den turbulenten Ausgleichsvorgängen.

Bei den Strömungen der freien Turbulenz kann man nun unschwer eine allgemeine Hypothese aufstellen. Da es sich hier um statistische Ausgleichsvorgänge handelt, ist ein Vergleich der turbulenten Vorgänge mit den molekularen Erscheinungen der Diffusion und der Wärmeleitung sehr naheliegend. Wenn auch die molekularen und die molaren Prozesse in den Einzelheiten ganz verschieden verlaufen, so ist es doch andererseits recht wahrscheinlich, daß sich auch bei den turbulenten Vorgängen im Endeffekt rein statistische Verteilungen ergeben. In der Tat haben die in zahlreichen Fällen gemessenen Geschwindigkeitsverteilungen in Freistrahlen und in Windschattengebieten eine große Ähnlichkeit mit der Gaußschen Fehlerkurve. Die Fehlerkurve gibt vor allem den Verlauf der Profile in der Nähe des Maximums (der mit dem Ansatz (1) nicht richtig herauskommt) sehr befriedigend wieder[3]).

Es ist daher die Vermutung naheliegend, daß Impulsunterschiede[4]) in einer freien turbulenten Strömung in ähnlicher Weise ausgeglichen werden wie Konzentrationsunterschiede oder wie Wärme- bzw. Temperaturdifferenzen. Beispielsweise sind die bereits vor zehn Jahren von

[3]) An den äußersten Rändern kann die Fehlerkurve natürlich nicht mehr gelten, da die Potentialbewegung des Außenraumes der turbulenten Ausbreitung eine endliche Grenze setzt.

Die von Förthmann im ebenen Freistrahl gemessenen Geschwindigkeitsverteilungen wurden kürzlich von Okaya und Hasegawa durch die Gleichung dargestellt

$$u = u_{\max}\, e^{-\frac{1}{2}\lambda^2\left(1-\frac{\lambda^4}{k}\right)},$$

wobei $\lambda = y/x$ und $k =$ konst. bedeutet. Die Verfasser diskutieren die Verträglichkeit dieser Geschwindigkeitsformel mit dem Mischungswegansatz (2) (Proc. Physico-Mathematical Soc. Japan, 3. Ser., Bd. 22, 1940).

[4]) Physikalisch wirksam ist nicht die Geschwindigkeit als solche, sondern der Impuls ϱu^2. Wenn ϱu^2 durch eine Fehlerkurve dargestellt ist, so ist die Verteilung von u ebenfalls eine Exponentialfunktion. — In Windschattengebieten ist der Impulsverlust näherungsweise $\doteq 2 U u_1$ ($U =$ konstante Hauptbewegung, $u_1 =$ Geschwindigkeitsverlust). Hier sind also (bei nicht zu großen Untergeschwindigkeiten u_1) Impulsverlust und Geschwindigkeitsverlust einander proportional.

H. Muttray[5]) gemessenen Impulskurven, die das allmähliche Abklingen einer Impulsdelle hinter einem Widerstandskörper zeigen, mit den bekannten abklingenden Kurven der Wärmeleitungstheorie zum Verwechseln ähnlich. (Man braucht bloß den Abstand x von der Störungsstelle mit dem Zeitparameter der Temperaturkurven in geeigneter Weise zu vertauschen.)

Die Hypothese, daß die turbulente Impulsverteilung der Hauptbewegung durch eine partielle Differentialgleichung nach Art der Wärmeleitungsgleichung darstellbar sei (wobei der Ortsparameter x an die Stelle des Zeitparameters tritt), wird also einem unbefangenen Betrachter der Muttrayschen Meßergebnisse sehr nahegelegt. Wir setzen deshalb

$$\frac{\partial \overline{u^2}}{\partial x} = \Lambda \frac{\partial^2 \overline{u^2}}{\partial y^2} \quad \text{(3)}.$$

Wenn nun die Wärmeleitungsgleichung auf die Vorgänge der freien Turbulenz bislang noch nicht angewendet worden ist (dem Verfasser ist jedenfalls ein solcher Versuch nicht bekannt), so müssen andererseits gewisse Hemmungen gegen eine derartige Lösung bestanden haben. Tatsächlich erweckt ja auch die Analogiebetrachtung das grundsätzliche Bedenken, daß eine Größe, der der Wärmeleitfähigkeit entspricht, im Impulsfall nicht vorgegeben ist. Die physikalische Bedeutung der Größe Λ der Gl. (3) ist daher (zunächst wenigstens) nicht klar ersichtlich.

Dieser Einwand ist aber nicht entscheidend, denn jede neue Theorie bringt zunächst neue Unbekannte. Es muß daher ein anderer Grund gewesen sein, der einer molekularen Analogiebetrachtung entgegenstand. Anscheinend waren es die bisher vorliegenden Untersuchungen der sogenannten freien Strahlgrenze (wo ein Freistrahl mit konstanter Geschwindigkeit mit ruhender Flüssigkeit in Berührung tritt), die einer solchen Betrachtungsweise widersprachen.

Die ebene Berührung zweier Strahlen mit verschiedener Geschwindigkeit entspricht im Wärmefall der ebenen Berührung zweier Körper mit verschiedener Temperatur. Die Theorie der Wärmeleitung führt bekanntlich zu Temperaturverteilungen im Übergangsgebiet, die durch Fehlerintegralkurven dargestellt werden. Wenn die Körper gleiche Leitfähigkeit haben, hat die Berührungsebene stets die mittlere Temperatur, und die beiden Äste der Fehlerintegralkurve liegen (mit vertauschtem Vorzeichen) „symmetrisch" zur Grenzfläche. Wenn also die Analogie zwischen den molekularen und den turbulenten Ausgleichsvorgängen wirklich brauchbar ist, so müssen die Impulskurven im Vermischungsgebiet zweier Strahlen Fehlerintegralkurven sein, die ebenfalls (in dem angegebenen Sinn) symmetrisch zur Grenzfläche liegen.

Eine fehlende Symmetrie könnte natürlich durch die Annahme verschiedener „Impulsleitfähigkeiten" zu beiden Seiten der Grenze erklärt werden. Ein solcher Ausweg ist aber nicht erlaubt. Denn unsere Analogiebetrachtung, die ja nur das Wesentliche des turbulenten Ausgleichsvorganges erfassen soll, ist überhaupt nur sinnvoll bzw. kann nur durchgeführt werden, wenn man annimmt, daß das Impulsausbreitungsvermögen vom Impulswert selbst bzw. von y (wenigstens in erster Näherung) unabhängig ist. Daß die turbulenten Vorgänge in zweiter Näherung sehr wahrscheinlich ganz anders und erheblich komplizierter sind als die entsprechenden molekularen Prozesse, daß also ein Vergleich in zweiter Näherung recht problematisch wäre, braucht nicht näher erörtert zu werden.

Die bisherigen Untersuchungen an der freien Strahlgrenze beziehen sich auf den am leichtesten zu verwirklichenden und praktisch wichtigen Grenzfall, wo die u-Geschwindigkeit auf der einen Seite verschwindet, wo also ein Strahl konstanter Geschwindigkeit mit ruhender Flüssigkeit in Berührung kommt. Hier müßte man also auf der Grenzfläche den halben Impuls der Maximalgeschwindigkeit erwarten, und die Impulsverteilungen diesseits und jenseits der Grenze müßten einander genau entsprechen. In Wirklichkeit sind aber bisher nur deutlich unsymmetrische Verteilungen des Gesamtdrucks (der praktisch dem Impuls entspricht) gemessen worden[6]). Der Gesamtdruck der Grenzfläche wurde stets kleiner als der halbe Maximaldruck festgestellt, und die gemessenen Verteilungen verlaufen auf der Seite der ruhenden Flüssigkeit flacher und in den Strahl hinein auffallend steiler.

Die ausgesprochene Unsymmetrie der gemessenen Impulskurven mag auch plausibel erschienen sein, weil aus dem Gebiet der Ruhe ständig neue Flüssigkeit angesaugt wird, von der anderen Seite dagegen nicht. Es liegen also auf beiden Seiten der Grenze zweifellos verschiedene hydrodynamische Verhältnisse vor. Dazu kommt noch, daß man die festgestellte Unsymmetrie des Gesamtdruckverlaufes durch den Mischungsweganssatz (1) recht gut erklären konnte[7]). Es ist daher sehr wohl verständlich, daß ein Vergleich zwischen den turbulenten

[5]) H. Muttray: Die experimentellen Tatsachen des Widerstandes ohne Auftrieb. Handb. d. Experimentalphysik von Wien-Harms. IV, 2, S. 325 (1932).

[6]) s. Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen, 2. Lieferung (1923) S. 69. Ferner: G. Cordes, Ing.-Arch. Bd. 8 (1937) S. 245; v. Bohl, Ing.-Arch. Bd. 11 (1940) S. 295. (Die Meßpunkte von Cordes weichen nur wenig von der Fehlerintegralkurve ab.)

[7]) W. Tollmien: Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge. Z. angew. Math. Mech. Bd. 6 (1926), S. 468.

und den molekularen Ausgleichsvorgängen gar nicht versucht worden ist, zumal das Studium der Strahlgrenze (deren Verhalten für die Konstruktion von Windkanälen von erheblichem Interesse war) zu den ersten Untersuchungen auf dem Gebiete der freien Turbulenz gehörte.

Diese Argumente gegen die Anwendung einer molekularen Analogiebetrachtung bestehen aber doch nur scheinbar. Zwar spielt die Menge der einseitig aus der Ruhe angesaugten Flüssigkeit eine wesentliche Rolle. Aber der Querpuls des einseitigen Zustromes ist dennoch ganz geringfügig. Vom Standpunkt des Impulsausgleiches (und nur darum handelt es sich bei der Analogiebetrachtung) ist daher die erwähnte Unsymmetrie vernachlässigbar gering.

Aber sprechen nicht doch die vorliegenden Messungen gegen eine Übertragung der molekularen Betrachtungsweise? Auch dies ist ein Trugschluß. Die Messungen sind nämlich gar nicht an wirklich ebenen Strahlgrenzen ausgeführt worden. Die alten Göttinger Messungen beziehen sich auf den runden Freistrahl und die ursprünglich rechteckigen Strahlen von Cordes und von v. Bohl dürften in einer gewissen Entfernung von der Düse auch nicht mehr ganz eben gewesen sein. Beim runden Freistrahl ist es aber ziemlich selbstverständlich, daß die Impulskurve nach außen hin flacher und in den Strahl hinein steiler verläuft. (Das entsprechende Wärmeleitungsproblem (erwärmter Zylinder in einer kälteren Umgebung) ist ja auch unsymmetrisch.)

Die Entscheidung der Frage, ob eine Anwendung der molekularen Analogie auf die Vorgänge der freien Turbulenz grundsätzlich möglich ist oder nicht, hängt also von Gesamtdruckmessungen an einer wirklich ebenen Strahlgrenze ab. Der Verfasser hat daher solche Untersuchungen angestellt. Durch entsprechende Führung des Strahles war dafür gesorgt, daß auch noch in größerer Entfernung von der Düse praktisch ebene Verhältnisse vorlagen.

Die unter diesen Bedingungen durchgeführten Untersuchungen zeigen nun, daß die Impulsverteilungen tatsächlich in erster Näherung symmetrisch sind und sich überraschend gut durch Fehlerintegralkurven darstellen lassen. Diese Tatsache wurde durch zahlreiche sorgfältige Messungen in den verschiedensten Abständen von der Düse nachgewiesen.

In Bild 1 ist eine solche Meßreihe dargestellt. Die schwarzen Meßpunkte bedeuten die in den einzelnen Querabständen y bestimmten Gesamtdruckwerte q für einen vorgegebenen x-Abstand von der Düse (diese Werte sind auf den maximalen Gesamtdruck $q_{\max}$ der Düsenströmung bezogen). Die ausgezogene Linie ist die Fehlerintegralkurve, die auf der Grenze $y=0$ durch den Punkt $\frac{q}{q_{\max}}=0{,}5$ geht, die also mit ihren beiden Ästen (in dem angegebenen Sinn) genau symmetrisch zur Grenzfläche liegt. Die Meßpunkte liegen auf oder in unmittelbarer Nähe der Fehlerintegralkurve. Bei genauem Betrachten erkennt man, daß eine schwache Unsymmetrie zweifellos vorhanden ist. Diese Abweichung ist aber so geringfügig, daß sie nur bei sehr guter Meßgenauigkeit (die durch Mittelwertbildung über längere Zeiträume erzielt wurde) deutlich in Erscheinung tritt.

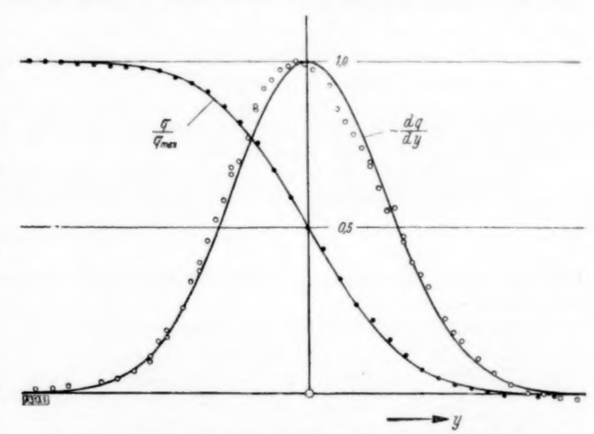


Bild 1. Gesamtdruckverteilung in der Vermischungszone der ebenen Strahlgrenze.

Wegen der Bedeutung dieser Frage wurde für einen x-Abstand auch der Differentialquotient des Impulsverlaufes aus der Druckdifferenz zweier nahe benachbarter Stauröhrchen bestimmt. Diese Differentiationsmessungen sind durch die hellen Kreise dargestellt (wobei die Einzelwerte wieder auf den Größtwert bezogen sind). Bei genau symmetrischen Verhältnissen müßten die Meßpunkte auf der in Bild 1 eingezeichneten Fehlerkurve liegen, die aus der Differentiation der ausgezogenen Fehlerintegralkurve hervorgeht. In Wirklichkeit sind die Meßpunkte etwas nach links verschoben. Die Neigung der Gesamtdruckkurve ist also auf der Außenseite tatsächlich etwas flacher als auf der Strahlseite.

Die Abweichungen von der Symmetrie sind aber derart gering, daß man sie für eine Theorie der ersten Nährung mit gutem Gewissen vernachlässigen kann [8]). Damit ist das

[8]) Allzu große Genauigkeitsanforderungen zu stellen, hat schon deswegen keinen Sinn, weil bei starker Turbulenz (besonders in den Randgebieten) mit dem Auftreten systematischer Meßfehler zu rechnen ist. Außerdem ist der Unter-

wesentliche Argument gegen die Anwendung der molekularen Analogiebetrachtung auf die freie Turbulenz beseitigt.

Die sinngemäße Übertragung der Theorie der Wärmeleitung auf die turbulenten Ausbreitungsvorgänge erhält noch dadurch ihre besondere Rechtfertigung, daß die statistischen Funktionen der Fehlerkurve und der Fehlerintegralkurve die gemessenen Impulsverteilungen wesentlich besser wiedergeben als die mit dem Mischungsweganstatz (1) erhaltenen Funktionen. Außerdem ist die rechnerische Behandlung unvergleichlich einfacher als die mathematische Durchführung der Mischungswegtheorie [9]).

4. Entwicklung einer phänomenologischen Theorie der freien Turbulenz auf Grund der molekularen Analogiebetrachtung.

Im folgenden wollen wir nun unsere Theorie kurz wiedergeben.

Die Impulsverteilungen in ebenen Freistrahlen (Schlitzstrahlen) und in ebenen Nachlaufgebieten sind nach den vorliegenden Messungen in guter Näherung durch die Gleichung

$$\overline{u^2} = c_1 + \frac{c_2}{b} e^{-(y/b)^2} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

darstellbar (hier ist die Länge b ein mit x veränderliches Maß für die Breite der Vermischungszone und c_1 und c_2 sind Konstanten).

Diese Gleichung ist eine Lösung der Differentialgleichung (3), wenn für die „Übertragungsgröße" A gesetzt wird,

$$A = \frac{b}{2} \frac{\mathrm{d}\, b}{\mathrm{d}\, x} \quad \ldots \ldots \quad (5).$$

Da die Impulsverteilung an der Grenze eines ebenen Strahles, der an ruhende Flüssigkeit grenzt, näherungsweise durch eine Fehlerintegralkurve darstellbar ist, so dürfen wir auch ganz allgemein für den Fall der ebenen Berührung zweier Parallelstrahlen ansetzen:

$$\overline{u^2} = c_1 + \frac{c_2}{b} \int_0^y e^{-(y/b)^2} \mathrm{d}\, y \quad \ldots \ldots \quad (9).$$

Auch diese Gleichung ist eine Lösung der Gl. (3), wenn wir für die Übertragungsgröße wiederum die Beziehung (5) einführen.

Die Impulsverteilung in größerer Entfernung hinter einem ebenen Gitter können wir in guter Übereinstimmung mit vorliegenden Messungen [10]) durch die Gleichung wiedergeben:

$$\overline{u^2} = c_1 + c_2\, e^{-f(x)} \sin (2 \pi\, y/\beta) \quad \ldots \ldots \quad (7).$$

(Hier ist β die Gitterteilung. Der Exponent $f(x)$ scheint nach den vorliegenden Messungen proportional x zu sein.)

Die Gl. (7) ist ebenfalls eine Lösung der Gl. (3), wenn für A gesetzt wird:

$$A = \frac{\beta^2}{4 \pi^2} \frac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, x} \quad \ldots \ldots \quad (8).$$

Damit haben wir die Übertragungsgröße für die beiden Fälle der veränderlichen und der konstanten Vermischungsbreite bestimmt. Allerdings wird durch diese rein formale Bestimmung von A keine tiefere physikalische Aussage erzielt. (Die physikalische Bedeutung von A wird man wohl erst dann klar erkennen, wenn es gelungen sein wird, die Vorgänge der freien Turbulenz durch eine Statistik der Wirbelballen darzustellen.)

Nachdem wir nun festgestellt haben, daß die Gl. (3) die Gesetzmäßigkeit der Impulsübertragung für das uns bekannte Gebiet der freien Turbulenz in sehr guter Näherung wiedergibt, haben wir nach dem „Ansatz" zu fragen, der erforderlich ist, wenn aus der Bewegungsgleichung die Differentialgleichung (3) folgen soll.

---

schied zwischen dem gemessenen Gesamtdruck $p + \frac{\varrho}{2} \overline{u^2}$ und dem Impuls $\varrho \overline{u^2}$ von der Größenordnung der Abweichungen der Meßpunkte von der Fehlerkurve bzw. der Fehlerintegralkurve.

Es wäre übrigens auch denkbar, daß nicht $\varrho \overline{u^2}$, sondern $p + \varrho \overline{u^2}$ statistisch verteilt wird (die Gl. (10) wäre dann dementsprechend abzuändern). Solche Feinheiten, die an sich von grundsätzlicher Bedeutung sind, können aber zur Zeit noch nicht beurteilt werden, da ein hinreichend genaues Verfahren zur Bestimmung des statischen Druckes noch fehlt.

[9]) Eine ausführliche Darstellung der Gesetzmäßigkeiten der freien Turbulenz auf Grund der an dieser Stelle entwickelten Theorie erscheint demnächst in einem VDI-Forschungsheft. Dort wird auch die Brauchbarkeit der statistischen Funktionen für die Darstellung des Impulsverlaufes an Hand zahlreicher Messungen im einzelnen nachgewiesen.

[10]) R. Gran Olsson: Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung hinter einem Gitter bei turbulenter Strömung. Z. angew. Math. Mech. Bd. 16 (1936), S. 257.

Die Bewegungsgleichung des ebenen Problems lautet in der Impulsform

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\varrho}+\overline{u^2}\right)+\frac{\partial \overline{u v}}{\partial y}=0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9),$$

wenn Zähigkeitskräfte zu vernachlässigen sind. Wenn wir auch noch die Druckunterschiede in erster Näherung vernachlässigen (was bei den Vorgängen, die zur Gl. (3) führten, sicher erlaubt ist), so ersehen wir, daß die Gl. (3) nur dann aus der Impulsgleichung erhalten wird, wenn für $\overline{u v}$ die Beziehung gilt

$$\overline{u v}=-\Lambda \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial y} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10).$$

Diese Beziehung über die Abwanderung des u-Impulses in die v-Richtung ist also das Ergebnis unserer induktiv entwickelten Theorie der freien turbulenten Strömungen.

Das durch Gl. (10) dargestellte „Impulsübertragungsgesetz" besagt: Der Strom von u-Impuls, der in die Querrichtung y abwandert, ist proportional dem u-Impulsgefälle in dieser Richtung.

Die Impulsübertragung erfolgt in Ebenen, die durch die u-Richtung und den Gradienten des u-Impulses beschrieben werden. Das Übertragungsgesetz lautet daher in Vektorschreibweise

$$j\,\overline{u v}=\Lambda\,[i\,[i\,\nabla\,\overline{u^2}]] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10\,a),$$

wenn i bzw. j die Einheitsvektoren der Längs- bzw. der Querrichtung bedeuten (die Querrichtung j wird durch (10 a) definiert).

Die Darstellung (10 a) ist vom Bezugssystem unabhängig. Denn i ist kein willkürlicher Vektor, sondern i beschreibt die tatsächliche Bewegungsrichtung der Flüssigkeit vor ihrem Eintritt in den Bereich der turbulenten Vermischung.

Das Ergebnis unserer Untersuchungen ist nun insofern recht merkwürdig, als wir wider Erwarten keinen Ausdruck für die turbulente Scheinreibung gefunden haben. Denn die Gl. (10) gibt lediglich an, wie der Gesamtimpuls $\varrho\,\overline{u v}=\varrho\,\overline{u' v'}+\varrho\,\bar{u}\,\bar{v}$ ausgebreitet wird. Über das Verhalten von $\varrho\,\overline{u' v'}$ allein wird nichts ausgesagt, bzw. der Mechanismus der freien Turbulenz verfügt lediglich über die Summe des stationären und des instationären Anteil des Quertransportes, ohne daß ein Unterscheidungsmerkmal zwischen diesen Gliedern erkennbar wäre[11]).

Natürlich kann man Gl. (10) nach $\overline{u' v'}$ auflösen. Es ist dann aber noch die Frage, ob eine solche Gleichung für $\overline{u' v'}$ ein für die freie Turbulenz geltender Sonderfall einer universellen Schubspannungsformel darstellt.

Eine mögliche Form für einen allgemeinen Schubspannungsausdruck wäre beispielsweise

$$\tau/\varrho=-\varkappa\left(\overline{u v}+\frac{\partial \overline{u^2}}{\partial y}\right) \qquad 0<\varkappa<1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11).$$

Der Faktor $\varkappa$ ist bei freier Turbulenz 1 (wodurch (11) mit (10) identisch wird) und bei Nichtturbulenz oder bei Turbulenz ohne Scheinreibung ist $\varkappa=0$).

Bekanntlich ist das Auftreten einer turbulenten Schubspannung an das Bestehen einer Korrelation zwischen den Längs- und den Querbewegungen geknüpft. Der Faktor k dieser Korrelation verschwindet nun nicht nur für gewisse turbulente Strömungen (beispielsweise für die abklingende, isotrope Turbulenz), sondern auch für periodische Wirbelbewegungen (Karman-Wirbel)[12]). Da sich die freie Turbulenz aus groben periodischen Störungen entwickelt, ist der Versuch naheliegend, den Faktor $\varkappa$ als Funktion des Korrelationskoeffizienten k anzusetzen beispielsweise durch $\varkappa=$ Zahl k).

5. Die Ausbreitung der Vermischungszonen in der x-Richtung.

Bei den vorangegangenen Betrachtungen ist der Verlauf der Breite der Vermischungszone in ihrer Abhängigkeit von der Koordinate x noch offengelassen worden, dieser ist daher noch zu klären. In den bisherigen mit dem Begriff des Mischungsweges operierenden Betrachtungen wurden von Anfang an nur solche Fälle in Betracht gezogen, wo die Geschwindigkeitsprofile in den verschiedenen Entfernungen x affin zueinander waren. Es ergeben sich hier durch Einsetzen des Ausdrucks für die scheinbare Schubspannung in die hydrodynamischen Differentialgleichungen jeweils automatisch die Potenzen von x, nach denen die Breite des Vermischungsgebietes zunimmt und die Geschwindigkeit abnimmt (soweit diese nicht wie beim Strahlrand konstant bleibt).

[11]) Vom statistischen Standpunkt aus sind die Anteile $\overline{u' v'}$ und $\bar{u}\,\bar{v}$ offenbar gleichberechtigt bzw. die Kennzeichen dieser Glieder sind lediglich hydrodynamischer Natur. Die Gleichartigkeit der Anteile $\bar{u}\,\bar{v}$ und $\overline{u' v'}$ erscheint insofern plausibel, als ja auch die stationäre v-Bewegung eine unmittelbare Folge der Einwirkung der Turbulenz auf die Flüssigkeit ist. (Ohne die Turbulenz wäre bei der vorausgesetzten Reibungslosigkeit keine v-Komponente vorhanden und es würde sich nur die u-Geschwindigkeit an den Strahlrändern diskontinuierlich verändern.)

[12]) W. Tollmien: Über die Korrelation der Geschwindigkeitskomponenten von periodisch schwankenden Wirbelverteilungen. Z. angew. Math. Mech. Bd. 15 (1935), S. 96.

XUM

Da in der neuen Theorie über das Impulsprofil von vornherein schon verfügt ist und zwar so, daß auch hier die verschiedenen Impulsprofile ein und derselben Strömung zueinander affin sind, genügt es, diese Affinität formelmäßig zu erfassen, wie es in den Gl. (4) und (6) geschehen ist, und zuzusehen, durch welche Potenzen man die Gl. (3), (5) und (10) befriedigen kann. Hierzu ist nur noch die Annahme nötig, daß die Strömungen einschließlich der Schwankungen in den einzelnen Querschnitten zueinander ähnlich verlaufen, daß also beispielsweise die Schwankungsgeschwindigkeiten in entsprechenden Querabständen bestimmte Bruchteile des maximalen Geschwindigkeitsunterschiedes $u_{1\,\max}$ sind und daß auch $\overline{u\,v}$ proportional zu $\bar{u}\cdot\bar{v}$ gesetzt werden darf. Dann ergibt sich aus Gl. (10) unter Verwendung der Gl. (5) für Λ, daß

$$\frac{\mathrm{d}\,b}{\mathrm{d}\,x}\frac{\partial\,(\bar{u}^2/u_{1\,\max}^2)}{\partial\,(y/b)}=f(y/b)\quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

nur von y/b abhängt.

Für die Geschwindigkeit ist im allgemeinen

$$u=U+u_1$$

zu setzen, wobei U eine konstante Geschwindigkeit bedeutet und die Geschwindigkeitsunterschiede gegen U durch u_1 ausgedrückt sind.

Beim ebenen Nachlauf kann man für kleine $\frac{u_1}{U}$ näherungsweise $u^2=-2\,U\,u_1$ schreiben. Es folgt daher aus (12) $\left(\text{da aus Ähnlichkeitsgründen } \frac{u_1}{u_{1\,\max}} \text{ nur von } \frac{y}{b} \text{ abhängt}\right)$, daß

$$\frac{U}{u_{1\,\max}}\frac{\mathrm{d}\,b}{\mathrm{d}\,x}=\text{konst.}\quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

ist. Daraus folgt weiter (da nach dem Impulssatz hier $u_{1\,\max}\,b=$ konst. ist)

$$b\sim\sqrt{x}\quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Ein solcher Gang der Vermischungsbreite ist für den ebenen Windschatten seit den Messungen von **Schlichting** bekannt[13]).

Beim ebenen Freistrahl in ruhender Umgebung sind u und u_1 identisch. Bei der ebenen Berührung zweier Strahlen ist $u_{1\,\max}$ eine Konstante. In beiden Fällen ist aus Ähnlichkeitsgründen $u^2/u_{1\,\max}^2$ nur von y/b abhängig. Es folgt somit aus (12), daß $\frac{\mathrm{d}\,b}{\mathrm{d}\,x}=$ konst. bzw.

$$b\sim x\quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

ist. Damit haben wir die für Strahlen bekannte lineare Ausbreitung der Vermischungsgebiete richtig wiedergegeben.

6. Zusammenfassung.

1. Es wurde festgestellt, daß die Impulsverteilungen in turbulenten Ausbreitungsbewegungen durch die statistischen Funktionen der Fehlerkurve und der Fehlerintegralkurve in guter Näherung beschrieben werden. Die turbulenten und die molekularen Ausgleichsvorgänge können daher in gewisser Weise miteinander verglichen werden, so daß die sinngemäße Anwendung der Differentialgleichung der Wärmeleitung auf die Impulsausbreitung in freien turbulenten Strömungen möglich ist.

2. Aus dieser Differentialgleichung des Impulses und der hydrodynamischen Bewegungsgleichung folgt, das der gesamte, in die Querrichtung abwandernde Strom des u-Impulses (der teils durch die Schwankungsbewegungen, teils durch die stationäre Querbewegung hervorgerufen wird) proportional ist dem u Impulsgefälle in dieser Richtung. Als Proportionalitätsfaktor erscheint die „Übertragungsgröße" Λ des Impulses, die als Funktion der Vermischungsbreite durch die Theorie selbst bestimmt ist.

3. Mit Hilfe der Formel für die Übertragungsgröße können die bekannten Ausbreitungsgesetzmäßigkeiten der Vermischungsgebiete auf Grund von Ähnlichkeitsbetrachtungen richtig wiedergegeben werden. 313

[13]) H. **Schlichting**: Über das ebene Windschattenproblem. Ing.-Arch. Bd. 1 (1930), S. 533.

Turbulente Ausbreitung eines Stromes erhitzter Luft.

Von *Wilhelm Schmidt* in Bochum.

(Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Strömungsforschung.)

I. Teil*)

Der Prandtlsche Mischungsweganssatz, dessen Verwendung bei der Berechnung einer Reihe turbulenter Ausbreitungsvorgänge gute Übereinstimmung mit den Experimenten ergab, wird auf die Berechnung der Ausbreitung eines ebenen und eines räumlichen Strahls erhitzter Luft angewandt. Die Ausbreitung des ebenen Strahls wurde auch nach dem Ansatz von Taylor berechnet. Über die Ausbreitung des runden Strahls und seine experimentelle Untersuchung wird in dem im nächsten Heft erscheinenden II. Teil der Arbeit berichtet.

Einleitung.

In turbulenten Strömungen treten neben den durch die unregelmäßigen Molekularbewegungen hervorgerufenen Schubspannungen die durch die ungeordneten Mischbewegungen molarer Massen verursachten „scheinbaren Schubspannungen" auf. Beide genügen dem Newtonschen Reibungsansatz:

Schubspannung proportional dem Geschwindigkeitsgefälle. Im besonderen schreibt man für die von der Zähigkeit herrührenden Schubspannungen

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{usw.}$$

und für die scheinbaren Schubspannungen

$$\tau'_{xy} = A \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad \text{usw.},$$

wobei A eine zunächst unbekannte Austauschgröße ist. In den meisten Fällen kann τ_{xy} als klein gegen τ'_{xy} vernachlässigt werden. Um für die Austauschgröße A und damit auch für die scheinbare Schubspannung τ'_{xy} einen Ansatz zu erhalten, denkt man sich die augenblickliche Geschwindigkeit zerlegt in einen zeitlichen Mittelwert und die darüber gelagerten Schwankungen:

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad w = \bar{w} + w'$$

$$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} = \text{Mittelwerte};\; u', v', w' = \text{Schwankungen}).$$

Die Schwankungen bewirken einen Impulstransport, als dessen Rückwirkung die scheinbaren Schubspannungen anzusehen sind. Das Gesamtsystem der Spannungen bildet einen Spannungstensor, dessen Komponenten sich in folgender Form darstellen lassen:

$$\sigma'_x = -\varrho\, \bar{u}'^2; \quad \tau'_{xy} = -\varrho\, \overline{u' v'} \quad \text{usw.}$$

Da die Schwankungen u', v', w' aber unbekannt sind, lassen sich die Bewegungsgleichungen mit diesen Ansätzen nicht integrieren. Man muß vielmehr die Spannungskomponenten durch die zeitlichen Mittelwerte der Strömung ausdrücken. Prof. Prandtl [4][1]) gelang es, solche Ansätze zu machen, indem er den Begriff des Mischungsweges einführte.

Um zu diesen Ansätzen zu gelangen, denken wir uns eine ebene Strömung in Richtung der x-Achse mit einem Geschwindigkeitsgefälle senkrecht zur Strömungsrichtung. Den in der Strömung stattfindenden Vermischungsvorgang erklärt man dann durch die Annahme, daß innerhalb der Hauptbewegung einzelne Flüssigkeitsballen eine Eigenexistenz führen. Diese Eigenexistenz dauert nur für eine bestimmte Wegstrecke an, dann vermischen sich die Flüssigkeitsballen mit der neuen Umgebung. Wir betrachten nun einen einzelnen Flüssigkeitsballen, der sich mit der Eigengeschwindigkeit v' senkrecht zur Strömungsrichtung bewegt, und der von seiner Ausgangsstelle die x-Komponente der dort herrschenden mittleren Geschwindigkeit mitbringt. Diese Geschwindigkeit kann er nur bis zu seiner Vermischung mit einer neuen Umgebung, also nur längs einer gewissen Wegstrecke l, beibehalten. Die Wegstrecke l, längs der der Ballen die Geschwindigkeit des Ausgangsortes ungeändert beibehält, nennt man nach Prandtl den „Mischungsweg". Der Geschwindigkeitsunterschied, den der Ballen durch seine Verschiebung gegenüber der neuen Umgebung gewinnt, stellt sich mit Hilfe des Mischungsweges dar durch $l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$, und in erster Näherung kann man daher die

*) Der 2. Teil wird im nächsten Heft erscheinen.

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Schrifttumverzeichnis am Schluß der Arbeit.

mittlere Geschwindigkeitsschwankung u' diesem Ausdruck proportional setzen

$$u' \sim l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\text{ [2]}.$$

Die Quergeschwindigkeit v' kann man sich dadurch entstanden denken, daß zwei Flüssigkeitsballen mit verschiedenem u', die sich voreinander befinden, zusammenprallen oder sich voneinander entfernen. Die entstehenden Geschwindigkeiten v' können also proportional u' gesetzt werden. Für die Schubspannung erhält man demnach, wenn die Proportionalitätsfaktoren in u' und v' und der Korrelationsfaktor in $\overline{u'v'}$ in das noch unbekannte l hineingenommen werden,

$$\tau'_{xy} = \varrho\, l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2 \quad \text{. . . . . (1)},$$

und wenn man noch berücksichtigt, daß τ'_{xy} mit $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ sein Vorzeichen ändert,

$$\tau'_{xy} = \varrho\, l^2 \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad \text{. . . . . (1a)}.$$

Der Vorteil dieses Ansatzes besteht darin, daß man in manchen Fällen Aussagen über das Verhalten von l machen kann, während dies für A nicht möglich ist. Insbesondere nimmt Prandtl in Fällen der freien Turbulenz an, daß

1. für genügend große Reynoldssche Zahlen in Querschnitten senkrecht zur Strömungsrichtung die Vorgänge geometrisch und mechanisch ähnlich verlaufen, und daß
2. l über den ganzen Querschnitt jeweils konstant ist.

Aus der zweiten Annahme folgt dann, daß l der Breite b des Strahles proportional ist.

Einen ähnlichen Ansatz für die scheinbare Schubspannung gewinnt G. I. Taylor [9] durch eine vom Prandtlschen Gedankengang abweichende Überlegung.

Taylor setzt voraus, daß in der betrachteten turbulenten Strömung nicht nur die Hauptbewegung, sondern auch die turbulente Mischbewegung als zweidimensional angesehen werden kann. Führt man nun die Rotation

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

— sie ist nach Taylor die Größe, die dem Austausch unterliegt — in die Eulersche Bewegungsgleichung ein, so läßt sich diese

$$-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right) + 2\, v\, \omega \quad \text{schreiben.}$$

Zur Vereinfachung der Theorie nimmt Taylor eine Strömung mit den mittleren Geschwindigkeiten

$$U = f(y) \quad \text{und} \quad V = 0 \quad \text{an.}$$

Bildet man nun die zeitlichen Mittelwerte und drückt die Schwankung mit Hilfe des Mischungsweges L aus, so lautet die Gleichung Taylors

$$-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \overline{v\,L}\,\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d} y^2}.$$

Der Mischungsweg L ist nicht mit dem der Prandtlschen Theorie identisch, sondern ist eine für jedes einzelne individuelle Teilchen verschiedene positive oder negative Länge. Mit einer anderen ebenfalls veränderlichen Länge L' wird

$$v = L'\,\frac{\mathrm{d} U}{\mathrm{d} y}$$

gesetzt. Damit erhält man

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \varrho\, l^2 \left|\frac{\mathrm{d} U}{\mathrm{d} y}\right| \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d} y^2} = \frac{\partial \tau}{\partial y} \qquad (l^2 = \overline{L\,L'}).$$

Diese Gleichung läßt sich, wenn l von y unabhängig ist, integrieren, und man erhält für die scheinbare Schubspannung in

$$\tau'_{xy} = \frac{1}{2}\,\varrho\, l^2 \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \quad \text{. . . . . (2)}$$

einen Ansatz, der sich von dem Prandtlschen durch den Faktor 1/2 unterscheidet.

[2]) $\sim$ bedeutet proportional.

In ähnlicher Weise wie der Impuls werden auch andere Eigenschaften der Flüssigkeiten, wie Temperatur, Farbe, Staubgehalt usw. ausgetauscht. Beim Temperaturaustausch bekommt man nach Aufspaltung der augenblicklichen Temperatur in einen zeitlichen Mittelwert $\bar{\vartheta}$ und die Schwankungen ϑ' für die turbulente Wärmeleitung den Ansatz

$$-c_p\,\varrho\,\overline{v'\vartheta'},$$

wobei c_p die spezifische Wärme bei konstantem Druck ist. In Analogie zu der Ableitung des Ausdrucks für τ'_{xy} erhalten wir hier

$$v' \sim L'\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad \text{und} \quad \vartheta' \sim -L\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial y}.$$

Damit wird der Wärmetransport durch die Flächeneinheit in der Zeiteinheit $\varkappa$ durch turbulente Wärmeleitung mit $L\,L' = l^2$

$$\varkappa = c_p\,\varrho\,l^2\left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right|\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial y} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

Auch hier werden die Proportionalitätskonstanten und der Korrelationsfaktor in $\overline{u'\vartheta'}$ wieder in l hineingenommen. Neben der turbulenten Wärmeleitung tritt immer die durch Molekularbewegung hervorgerufene Wärmeleitung

$$-\lambda\frac{\partial \vartheta}{\partial y}$$

auf, die aber als klein gegen $\varkappa$ vernachlässigt werden kann.

Während man allgemein annimmt, daß die Austauschgrößen in der scheinbaren Schubspannung und der turbulenten Wärmeübertragung vollkommen gleich sind, daß also auch die Mischungswege identisch sind, ergibt sich aus der Taylorschen Theorie ein Unterschied. Der Mischungsweg des Temperaturaustauschs ist nach Taylor $\sqrt{2}$ mal so groß wie der des Impulsaustauschs.

Mit Hilfe des Prandtlschen Schubspannungsansatzes wurden Beispiele von Tollmien [8], Schlichting [6] und L. M. Swain [7] behandelt, wobei sich verhältnismäßig gute Übereinstimmung mit den Experimenten ergab.

Aufgabe dieser Arbeit ist es, die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung in einer durch Übertemperatur gegenüber der ruhenden Luft hervorgerufenen Strömung im ebenen und rotationssymmetrischen Fall nach den Ansätzen von Prandtl und der Annahme von der Identität der Mischungswege und im ebenen Fall auch nach G. I. Taylor zu ermitteln.

Das ebene Problem.

Längs einer waagerechten geraden Linie, die so lang gewählt wird, daß ein ebenes Problem vorliegt, wird der Luft Wärme zugeführt. Der entstehende Luftstrom vermischt sich an seinem Rande mit der umgebenden ruhenden Luft. Die auftreibende Kraft wird hervorgerufen durch die durch die Temperaturdifferenz gegen die ruhende Luft bedingten Dichteunterschiede. Die x-Achse legen wir in Richtung der Strömung und die y-Achse senkrecht zur Strömungsrichtung und senkrecht zur erwärmten Linie.

Bezeichnen wir mit T die absolute Temperatur des Strahles, mit T_0 die der ruhenden Luft und mit ϱ und ϱ_0 die entsprechenden Dichten, dann erhalten wir für die archimedische Auftriebskraft

$$K = g\,(\varrho_0 - \varrho).$$

Die in dieser Beziehung auftretende Dichtedifferenz läßt sich mit Hilfe des Gay-Lussacschen Gesetzes umformen in

$$\varrho_0 - \varrho = \varrho\,\beta\,\vartheta.$$

Dabei sind β der Ausdehnungskoeffizient und ϑ die als klein angenommene Temperaturdifferenz $T - T_0$. Die Auftriebskraft wird damit

$$\varrho\,g\,\beta\,\vartheta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

Mit dieser Größe für die Auftriebskraft lautet die Bewegungsgleichung

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + g\,\beta\,\vartheta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5),$$

wenn die Zähigkeitsschubspannung τ_{xy} und die Änderung der Normalspannung $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$ gegen

τ'_{xy} vernachlässigt werden. Diese Gleichung enthält die drei unbekannten Funktionen u, v und ϑ, zu deren Ermittlung noch zwei weitere Gleichungen, nämlich die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

und die Wärmetransportgleichung

$$\varrho\, c_p\left(u\frac{\partial \vartheta}{\partial x}+v\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)=\frac{\partial \varkappa}{\partial y} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

zur Verfügung stehen. In der letzten Gleichung müßte die Wärmeleitung

$$-\lambda\frac{\partial \vartheta}{\partial y}$$

ebenfalls vorkommen, kann aber als klein gegen $\varkappa$ vernachlässigt werden.

Bei der Untersuchung der Strömung in ihren Einzelheiten machen wir von den S. 266 angegebenen Annahmen über den Mischungsweg Gebrauch. Wenn wir mechanische und geometrische Ähnlichkeit der Vorgänge in den Querschnitten senkrecht zur Strömungsrichtung annehmen, folgt für den Mischungsweg, daß er der Strahlbreite b proportional sein muß

$$l=\varepsilon b \quad (\varepsilon=\text{konst.}).$$

Den Zusammenhang zwischen der Strahlbreite und der Entfernung vom Spalt ermitteln wir durch die folgende Abschätzung: Es ist $v'\sim l\frac{\partial \bar u}{\partial y}$. Für einen mittleren Wert von v' ergibt sich Proportionalität zwischen v' und $\frac{l\bar u}{b}$

$$v'\sim\frac{l\bar u}{b}.$$

Mit $l=\varepsilon b$ folgt daraus

$$v'\sim\varepsilon\bar u.$$

Außerdem folgt aus der Aussage

$$\frac{Db}{dt}\sim v' \quad \left(\frac{D}{dt}=\text{substantieller Differentialquotient}\right)$$

$$\bar u\frac{db}{dx}\sim r\,\bar u,$$

also

$$b=r\cdot x, \quad \text{wobei } r \text{ eine reine Zahl ist.}$$

Für den Mischungsweg l können wir also schreiben:

$$l=c\cdot x \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8).$$

Wenn wir zu dieser Gleichung den Impulssatz und den Wärmetransport der Hauptbewegung hinzunehmen, bekommen wir den Zusammenhang der Geschwindigkeit und der Temperatur mit dem Abstand von der erwärmten Linie.

Wir setzen voraus, daß der Wärmetransport durch die Querschnitte senkrecht zur Strömungsrichtung konstant ist, daß also

$$W=u\cdot b\cdot\varrho\cdot c_p\cdot\vartheta=\text{konst.} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9),$$

und damit

$$u=\frac{\text{Konst.}}{\varrho\,\vartheta\,x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9a)$$

ist. Aus dem Impulssatz, der in unserem Falle aussagt, daß die Änderung des Impulses längs des Weges dx gleich der Auftriebskraft längs dieser Strecke ist, gewinnen wir die Gleichung

$$\frac{dJ}{dx}dx\approx\frac{d}{dx}(\varrho\, b\, u^2)\,dx\approx b\, g\,\varrho\,\beta\,\vartheta\, dx.$$

Mit $\vartheta=Dx^{-m}$ (m zunächst noch unbekannt: D ist eine Konstante, die eingeführt wird, damit die Gleichung dimensionsrichtig wird)

$u=\frac{\text{Konst.}}{\varrho\,\vartheta\,x}$ und $b=r\cdot x$ wird der Impuls

$$J=\frac{r\,x\cdot\text{Konst.}^2}{\varrho\, D^2\, x^{-2m+2}}.$$

Nehmen wir im folgenden $\beta\vartheta$ als so klein gegen 1 an, daß es gegen 1 vernachlässigt werden kann, dann kann an Stelle von ϱ überall ϱ_0 geschrieben werden. Es wird somit

$$J = \frac{\text{Konst.}^2\, r\, x}{\varrho_0\, D^2\, x^{-2m+2}}$$

und

$$u = \frac{\text{Konst.}}{\vartheta\, x\, \varrho_0}.$$

Für den Impuls gilt dann die Beziehung

$$J \sim x^{2m-1} \qquad (10),$$

und für die Impulsänderung erhält man

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}x} \sim x^{2m-2}.$$

Gl. (9a) geht über in

$$u = \frac{r}{\vartheta x} \qquad (9b).$$

Ersetzt man auch in der Auftriebskraft ϱ durch ϱ_0 gemäß

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{1+\beta\vartheta} \approx \varrho_0 (1-\beta\vartheta)$$

und begeht dieselbe Vernachlässigung wie beim Impuls, so wird diese

$$r\, x\, g\, \frac{\beta \cdot D}{x^m} = r\, x^{1-m} \qquad (11).$$

Setzen wir nun (10) und (11) einander proportional, dann erhalten wir

$$x^{2m-2} \sim x^{1-m},$$

$$x^{3m-3} = \text{konst.},$$

also

$$m = 1.$$

Die Temperatur ϑ ist also der ersten Potenz des Abstandes von der Wärmequelle umgekehrt proportional. Wird nun $\vartheta = \frac{\text{Konst} \cdot D}{x}$ in (9b) eingesetzt, so zeigt sich, daß die Geschwindigkeit von dem Abstand von der erwärmten Linie unabhängig ist. Mit der Dimensionslosen $\eta = \frac{y}{x}$ ergeben sich demnach für u und ϑ die Ansätze:

$$\vartheta = \frac{1}{x}\,\Theta(\eta) \qquad (12a),$$

und

$$u = f(\eta) \qquad (12b).$$

Die neben u auftretende Geschwindigkeitskomponente v ist mit dieser durch die Kontinuitätsgleichung verknüpft. Man genügt der Kontinuitätsgleichung durch Einführung einer Stromfunktion ψ. Ausgehend von

$$u = f(\eta) = \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

erhält man durch Integration

$$\psi = \int f(\eta)\, \mathrm{d}y$$

und mit $\mathrm{d}y = x\,\mathrm{d}\eta$

$$\psi = x \int f(\eta)\, \mathrm{d}\eta .$$

Bezeichnen wir $\int f(\eta)\,\mathrm{d}\eta$ mit $F(\eta)$, dann wird

$$\psi = x\, F(\eta).$$

Durch Differentiation nach y und x gewinnt man daraus die Geschwindigkeitskomponenten u und v.

XUM

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = F' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13),$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -F + \eta F' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14),$$

wobei $'$ Differentiation nach η bedeutet.

Um die einzelnen in den Gleichungen vorkommenden Glieder in dimensionsloser Form zu erhalten, setzen wir

$$u = U\,\Phi'; \quad v = U(-\Phi + \eta\,\Phi')$$

und

$$\beta g \vartheta = \frac{\beta g \Theta}{x} = \frac{\Theta_0}{x} = \frac{U^2 \cdot \Theta_1}{x} \quad \text{und} \quad \vartheta = \frac{U^2}{\beta g x}\Theta_1 .$$

U ist die von x unabhängige Geschwindigkeit in der Mitte des Strahls.

Lösung des Problems mit dem Prandtlschen Schubspannungsansatz.

Mit

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\Phi''}{x} U; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\Phi'''}{x^2} U; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\Phi''\,\eta}{x} U$$

und

$$\tau'_{xy} = -\varrho\, c^2\, \Phi''^2\, U^2$$

erhält die Bewegungsgleichung die Form

$$2 c^2\, \Phi''\, \Phi''' - \Phi\, \Phi'' = \Theta_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15\text{a}).$$

Man erkennt, daß τ'_{xy} für positive η das negative Vorzeichen erhalten muß, wenn man berücksichtigt, daß die zu erwartende Geschwindigkeitsverteilung in der Mitte ein Maximum haben und nach dem Rande zu auf Null absinken muß. Da die Rechnung nur für die rechte Hälfte durchgeführt wird — für die linke Hälfte erhält man das Ergebnis durch Spiegelung —, muß $\frac{\partial u}{\partial y}$ und damit auch τ'_{xy} negativ sein. Das Entsprechende gilt auch für den Wärmetransport $\varkappa$. Multiplizieren wir die Wärmetransportgleichung mit βg, dann erhalten wir mit den Ansätzen (12a) und (3) und den Differentialquotienten

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -\frac{U^2}{\beta g}\left(\frac{\eta}{x^2}\Theta_1' + \frac{1}{x^2}\Theta_1\right); \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{U^2}{\beta g}\frac{\Theta_1'}{x^2}$$

die Wärmetransportgleichung

$$-\Phi'\,\Theta_1 - \Phi\,\Theta_1' = -c^2\,\{\Phi'''\,\Theta_1' + \Phi''\,\Theta_1''\}.$$

Diese Gleichung läßt sich sofort einmal integrieren und lautet nach Umordnung der Glieder

$$c^2\,\Phi''\,\Theta_1' - \Phi\,\Theta_1 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (16\text{a}).$$

Um den in (15a) und (16a) auftretenden, unbekannten Faktor c^2 zu beseitigen, machen wir die Substitution

$$\eta_1 = a\,\eta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

mit noch unbekanntem a. Dann wird, wenn jetzt die Striche Differentiationen nach η_1 bedeuten,

$$\frac{d\Phi}{d\eta} = a\,\Phi'; \quad \frac{d^2\Phi}{d\eta^2} = a^2\,\Phi''; \quad \frac{d^3\Phi}{d\eta^3} = a^3\,\Phi'''; \quad \frac{d\,\Theta_1}{d\eta} = a\,\Theta_1'.$$

Eingesetzt in (15a) und (16a), erhält man damit

$$2 c^2 a^5\, \Phi''\, \Phi''' - a^2\, \Phi\, \Phi'' = \Theta_1$$

und

$$2 c^2 a^3\, \Phi''\, \Theta_1' - 2\,\Phi\,\Theta_1 = 0.$$

Setzen wir nun die Zahlenfaktoren der linken Seiten von (15b) oder (16b) gleich, dann folgt

$$2 c^2 a^5 = a^2,$$

also

$$a = \left(\frac{1}{2c^2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{und damit} \quad \eta_1 = \eta\,(2c^2)^{-\frac{1}{3}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18),$$

so daß die beiden Differentialgleichungen die Form annehmen:

$$\Phi''\,\Phi''' - \Phi\,\Phi'' = (2c^2)^{+\frac{2}{3}}\,\Theta_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15\text{b}),$$

$$\Phi''\,\Theta_1' - 2\,\Phi\,\Theta_1 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (16\text{b}).$$

Multiplizieren wir nun (16) mit $(2\,c^2)^{+\frac{2}{3}}$ und bezeichnen das Produkt $(2\,c^2)^{+\frac{2}{3}}\Theta_1$ mit Θ_2, dann lauten unsere Differentialgleichungen

$$\Phi''\,\Phi''' - \Phi\,\Phi'' = \Theta_2 \quad \text{. . . . . (15c)}$$

und

$$\Phi''\,\Theta_2' - 2\,\Phi\,\Theta_2 = 0 \quad \text{. . . . . (16c).}$$

Zu diesen Differentialgleichungen treten die Randbedingungen hinzu. Diese sind

1. für die Mitte des Strahls
   $\Theta_2 = 1$ durch Normierung erreichbar,
   $u =$ endlich d. h. $\Phi' =$ endlich,
   $v = 0$ d. h. $\Phi = 0$;

2. für den Strahlrand
   $\Theta_2 = 0$,
   $\Theta_2' = 0$ wegen der Stetigkeit des Anschlusses nach außen,
   $u = 0$ d. h. $\Phi' = 0$,
   $\Phi'' = 0$ ebenfalls wegen der Stetigkeit des Anschlusses.

Die Lösung unseres Differentialgleichungssystems in geschlossener Form ist nicht möglich. Es müssen für Φ und Θ_2 Reihenansätze gemacht werden. Dabei muß aber eine Eigentümlichkeit des Prandtlschen Schubspannungsansatzes beachtet werden. Die Lösungen mit Hilfe dieses Ansatzes weisen nämlich gewisse Singularitäten auf. Man bekommt keinen asymptotischen Übergang zu konstanter Geschwindigkeit, sondern einen Anschluß nach außen mit endlicher Krümmung des Geschwindigkeitsprofils, und beim Geschwindigkeitsmaximum erhält man sogar unendliche Krümmung. Die Funktion Φ' verhält sich dort, d. h. bei $x = 0$ wie $y = A + B\,x^{\frac{3}{2}}$. Entsprechendes gilt auch für die Temperaturverteilung. Die Singularitäten treten dort auf, wo wegen $\frac{d\,u}{d\,y} = 0$ der Austausch verschwindet. In Wirklichkeit verschwindet dort der Austausch aber nicht vollständig. Der Vergleich der mit diesem Ansatz gewonnenen Ergebnisse mit den experimentellen Ergebnissen zeigt aber hinreichend gute Übereinstimmung, so daß die Verwendung dieses Ansatzes gerechtfertigt ist. Um die Singularität ganz zu vermeiden, hat Prof. Prandtl einen verbesserten Ansatz angegeben, der die Form

$$\tau'_{x\,y} = \varrho\, l^2 \frac{\partial u}{\partial y}\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + l'^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \quad \text{. . . . . (19)}$$

hat. Dieser Ansatz soll jedoch mit Rücksicht auf die Durchführbarkeit in unserer Rechnung nicht verwandt werden.

Dem Auftreten der Singularität trägt man in den Lösungsansätzen dadurch Rechnung, daß man Reihen ansetzt, die nach Potenzen von $\eta_1^{\frac{3}{2}}$ fortschreiten.

$$\Phi = a_0\,\eta_1 + a_1\,\eta_1^{\frac{5}{2}} + a_2\,\eta_1^4 + a_3\,\eta_1^{\frac{11}{2}} + a_4\,\eta_1^7 + \cdots \quad \text{. . . . . (20),}$$

$$\Theta_2 = b_0 + b_1\,\eta_1^{\frac{3}{2}} + b_2\,\eta_1^3 + b_3\,\eta_1^{\frac{9}{2}} + b_4\,\eta_1^6 + \cdots \quad \text{. . . . . (21).}$$

Wegen $\Theta_2(0) = 1$ ist $b_0 = 1$.

Durch Einsetzen der Ansätze (20) und (21) in die Differentialgleichungen und durch Vergleich gleich hoher Potenzen von η_1 errechnen sich die Koeffizienten, die zum Teil noch von a_0 abhängen, zu

$$a_0, \quad a_1 = -\frac{4}{15}\sqrt{2}, \quad a_2 = \frac{1}{18}a_0, \quad a_3 = -\frac{116}{4455}\sqrt{2},$$

$$a_4 = \frac{1}{3402}a_0, \quad a_5 = -\frac{224}{23856525}\sqrt{2}, \quad a_6 = 0{,}000000435\,a_0;$$

$$b_0 = 1, \quad b_1 = -\frac{2\,a_0\sqrt{2}}{3}, \quad b_2 = \frac{2}{9}a_0^2 + \frac{8}{45}, \quad b_3 = -\frac{29\,a_0\sqrt{2}}{405},$$

$$b_4 = \frac{2}{243}a_0^2 + \frac{608}{66825}, \quad b_5 = -\frac{431\,a_0}{280665}\sqrt{2}, \quad b_6 = 0{,}0001023\,a_0^2 + 0{,}0001085 \text{ usw.}$$

Eine Angabe über die Größen a_0 und den Randpunkt η_{1R} erhalten wir aus den Randbedingungen

$$\Phi'(\eta_{1R}) = \Phi''(\eta_{1R}) = 0.$$

XUM

Da die Konvergenz der Reihen, besonders die der Reihe für Θ_2 in der Nähe des Randes schlecht wird, setzen wir eine weitere Reihenentwicklung um den Randpunkt η_{1R} an, die gerade in dessen Nähe gut konvergiert. Wir setzen

$$\bar{\eta}_1 = \eta_{1R} - \eta_1 \quad \ldots \quad (22)$$

und erhalten die Lösungsansätze:

$$\Phi = \bar{a}_0 + \bar{a}_3 \bar{\eta}_1^3 + \bar{a}_4 \bar{\eta}_1^4 + \bar{a}_5 \bar{\eta}_1^5 + \bar{a}_6 \bar{\eta}_1^6 + \cdots \quad \ldots \quad (23),$$

$$\Theta_2 = \bar{b}_2 \bar{\eta}_1^2 + \bar{b}_3 \bar{\eta}_1^3 + \bar{b}_4 \bar{\eta}_1^4 + \bar{b}_5 \bar{\eta}_1^5 + \bar{b}_6 \bar{\eta}_1^6 + \cdots \quad \ldots \quad (24).$$

Wegen der Randbedingungen ist

$$\bar{a}_1 = \bar{a}_2 = \bar{b}_0 = \bar{b}_1 = 0 .$$

Geht man mit diesen Ansätzen in die Differentialgleichungen, so liefert der Vergleich gleich hoher Potenzen von $\bar{\eta}_1$ die Koeffizienten

$$\bar{a}_0, \quad \bar{a}_3 = -\frac{1}{6}\bar{a}_0, \quad \bar{a}_4 = \frac{\bar{b}_2}{24\bar{a}_0}, \quad \bar{a}_5 = \frac{1}{40}\frac{\bar{b}_2^2}{\bar{a}_0^3},$$

$$\bar{b}_2, \quad \bar{b}_3 = \frac{\bar{b}_2^2}{\bar{a}_0^2}, \quad \bar{b}_4 = \frac{5}{4}\frac{\bar{b}_2^3}{\bar{a}_0^4}, \quad \bar{b}_5 = \frac{7}{4}\frac{\bar{b}_2^4}{\bar{a}_0^6} - \frac{1}{12}\bar{b}_2 .$$

Die Größe von $\bar{a}_0$ läßt sich angenähert angeben. Es ist nämlich

$$\bar{a}_0 = \Phi(\eta_{1R}) .$$

Da aus $\Phi'(\eta_{1R}) = \Phi''(\eta_{1R}) = 0$ η_{1R} angenähert bekannt ist, man also auch einen Näherungswert für $\bar{\eta}_1$ besitzt, ist $\bar{b}_2$ die einzige Unbekannte. Über $\bar{b}_2$ erhält man eine Angabe, wenn man die Werte beider Entwicklungen für Φ, wie sie sich mit den Näherungswerten η_{1R}, a_0, $\bar{a}_0$, $\bar{\eta}_1$ ergeben, in einem Anschlußpunkt übereinstimmen läßt.

Verbesserung der Näherungswerte. Zur Verbesserung der zunächst nur angenäherten Werte wenden wir das Newtonsche Verfahren in einer Form für 4 Variable an. Wenn wir verlangen, daß sich die Entwicklung um den Nullpunkt und den Randpunkt mit stetiger Tangente und stetiger Krümmung aneinander anschließen sollen, dann bekommen wir 8 Entwicklungen, deren Differenz zu je zweien im Anschlußpunkt Null sein muß. Wegen der nur angenäherten Bestimmung von a_0, $\bar{a}_0$, $\bar{b}_2$ und $\bar{\eta}$ ist diese Differenz aber nicht 0, sondern nimmt die verschiedenen Werte ε_i an. Es ist also

$$\Phi_0 - \Phi_R = \varepsilon_1; \quad \Phi_0' - \Phi_R' = \varepsilon_2; \quad \Phi_0'' - \Phi_R'' = \varepsilon_3; \quad \Theta_{2\,0} - \Theta_{2\,R} = \varepsilon_4 \text{ [3]},$$

wobei die ε_i Funktionen der vier Unbekannten sind

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i(a_0, \bar{a}_0, \bar{b}_2, \bar{\eta}_1) .$$

Die ersten Näherungswerte der Unbekannten sind

$$a_0' = 1{,}14; \quad \bar{a}_0' = 0{,}97; \quad \bar{b}_2' = 0{,}24; \quad \bar{\eta}' = 0{,}6 .$$

Die verbesserten Werte a_0, $\bar{a}_0$, $\bar{b}_2$, $\bar{\eta}$ stellen sich mit Hilfe der ersten Näherungen und der Verbesserungen h, k, l, m dar in der Form

$$a_0 = a_0' + h, \quad \bar{a}_0 = \bar{a}_0' + k, \quad \bar{b}_2 = \bar{b}_2' + l, \quad \bar{\eta} = \bar{\eta}' + m .$$

Entwickeln wir nun die ε_i nach Potenzen von h, k, l, m und vernachlässigen die Glieder von höherer als der ersten Ordnung, so können wir die Verbesserungen aus dem System der folgenden vier Gleichungen bestimmen:

$$\varepsilon_{i\,a_0} \cdot h + \varepsilon_{i\,\bar{a}_0} k + \varepsilon_{i\,\bar{b}_2} l + \varepsilon_{i\,\bar{\eta}} m + \varepsilon_i = 0 \quad \ldots \quad (25).$$

Die an die ε_i angehängten Indizes a_0, $\bar{a}_0$, $\bar{b}_2$, $\bar{\eta}$ bedeuten Differentiation nach diesen Größen.

Für die Verbesserungen bestimmen sich aus dem Gleichungssystem (25) die Werte

$$h = 0{,}0002; \quad k = 0{,}00178; \quad l = 0{,}00051; \quad m = -0{,}0035 .$$

Die verbesserten Werte sind dann a_0

$$a_0 = 1{,}1398; \quad \bar{a}_0 = 0{,}96822; \quad \bar{b}_2 = 0{,}24051; \quad \bar{\eta} = 0{,}5965 .$$

---

[3]) Die angehängten Indizes geben an, ob es sich um die Entwicklung um den Nullpunkt oder den Randpunkt handelt.

Die Reihen für Φ und Θ_2 um den Nullpunkt sind damit

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= 1{,}13982\,\eta_1 - 0{,}37712\,\eta_1^{\frac{5}{2}} + 0{,}063322\,\eta_1^4 - 0{,}005079\,\eta_1^{\frac{11}{2}} + \cdots \\ \frac{u}{U} &= 1{,}1398 - 0{,}9428\,\eta_1^{\frac{3}{2}} + 0{,}253288\,\eta_1^3 - 0{,}0279345\,\eta_1^{\frac{9}{2}} + \cdots \\ \Theta_2 &= 1 - 1{,}0746035\,\eta_1^{\frac{3}{2}} + 0{,}6108258\,\eta_1^3 - 0{,}1154203\,\eta_1^{\frac{9}{2}} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (26\text{a}).$$

Diejenigen um den Randpunkt $(\bar{\eta}_1 = \eta_{1R} - \eta_1)$ lauten

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= 0{,}96822 - 0{,}16124\,\bar{\eta}_1^3 + 0{,}010356\,\bar{\eta}_1^4 + 0{,}001596\,\bar{\eta}_1^5 + \cdots \\ \frac{u}{U} &= 0{,}48372\,\bar{\eta}_1^2 - 0{,}041424\,\bar{\eta}_1^3 - 0{,}00798\,\bar{\eta}_1^4 - \cdots \\ \Theta_2 &= 0{,}24044\,\bar{\eta}_1^2 - 0{,}061767\,\bar{\eta}_1^3 + 0{,}01983\,\bar{\eta}_1^4 + \cdots \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (26\text{b}).$$

Die Werte der Funktionen Θ_2, Φ, $\frac{u}{U}$ und $\frac{v}{U}$ finden sich in Zahlentafel 1. Durch geeignete Maßstabswahl für die Geschwindigkeiten kann man erreichen, daß die Geschwindigkeits- und Temperaturprofile im Scheitel übereinstimmen. Die auf diese Art dargestellten Geschwindigkeits- und Temperaturprofile finden sich in Bild 1.

Die einzige Unbekannte der Theorie ist die Konstante c, der Proportionalitätsfaktor zwischen dem Mischungsweg und der Entfernung von der erwärmten Linie. Sie kann nur durch Vergleich mit dem Experiment ermittelt werden.

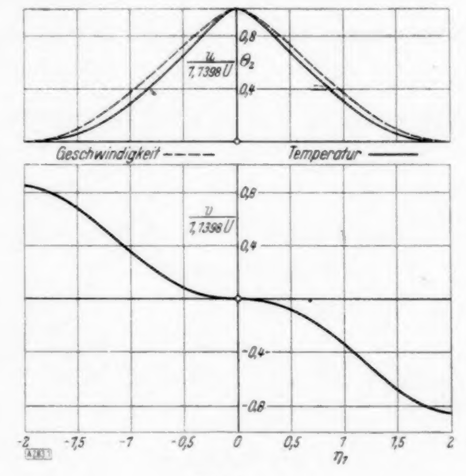


Bild 1.

Lösung des Problems mit dem Taylorschen Ansatz.

Wenn wir für die scheinbare Schubspannung den Taylorschen Ansatz (2)

Zahlentafel 1.

η_1	Θ_2	Φ	$\frac{u}{U}$	$\left(\frac{u}{1{,}1398\,U}\right)$ [1]	$\eta_1\,\Phi'$	$\frac{v}{U}$	$\left(\frac{v}{1{,}1398\,U}\right)$ [1]
0	1	0	1,1398	(1)	0	0	(0)
0,1	0,9665	0,1128	1,1202	(0,9826)	0,11202	— 0,0007	(— 0,00061)
0,2	0,90666	0,2215	1,0582	(0,9284)	0,21164	— 0,00986	(— 0,00865)
0,3	0,8311	0,3154	0,9888	(0,8675)	0,29664	— 0,01879	(— 0,01649)
0,4	0,75703	0,41995	0,91698	(0,8045)	0,3668	— 0,05256	(— 0,04611)
0,5	0,67354	0,507	0,8369	(0,7343)	0,4185	— 0,089	(— 0,0781)
0,6	0,59068	0,5866	0,7607	(0,6674)	0,4564	— 0,1302	(— 0,1142)
0,7	0,51964	0,65775	0,66914	(0,587)	0,4684	— 0,1893	(— 0,1661)
0,8	0,4324	0,7204	0,58575	(0,514)	0,4686	— 0,2518	(— 0,2209)
0,9	0,387	0,7749	0,5032	(0,4415)	0,4529	— 0,322	(— 0,2825)
1	0,294	0,8205	0,4246	(0,3725)	0,4246	— 0,3959	(— 0,3473)
1,1	0,2365	0,8604	0,3525	(0,3093)	0,3878	— 0,47265	(— 0,4147)
1,2	0,1818	0,8915	0,2812	(0,2467)	0,3375	— 0,554	(— 0,48605)
1,3	0,1364	0,9166	0,2185	(0,1917)	0,2841	— 0,6324	(— 0,5548)
1,4	0,0983	0,9356	0,1622	(0,1423)	0,22708	— 0,7085	(— 0,6216)
1,5	0,0678	0,9495	0,1139	(0,0999)	0,16915	— 0,77865	(— 0,6831)
1,6	0,0496	0,9584	0,0733	(0,0643)	0,11728	— 0,8411	(— 0,738)
1,7	0,0233	0,9639	0,0415	(0,0364)	0,0705	— 0,8934	(— 0,7838)
1,8	0,009	0,9667	0,0178	(0,01562)	0,032	— 0,9347	(— 0,8201)
1,9	0,0025	0,9678	0,0048	(0,00421)	0,00912	— 0,9587	(— 0,8411)
2	0	0,9682	0	(0)	0	— 0,9682	(— 0,8494)

$$\tau'_{xy} = \frac{1}{2}\,\varrho\, l^2 \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \frac{\partial u}{\partial y}$$

verwenden, lautet unser Differentialgleichungssystem:

$$c^2\,\Phi''\,\Phi''' - \Phi\,\Phi'' = \Theta_1 \quad \ldots \ldots \quad (27\text{a}),$$

$$c^2\,\Phi''\,\Theta_1' - \Phi\,\Theta_1 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (28\text{a}).$$

Mit der Substitution

$$\eta_1 = a\,\eta, \qquad a = c^{-\frac{1}{3}}$$

geht dieses über in

$$\Phi''\,\Phi''' - \Phi\,\Phi'' = (c^2)^{+\frac{2}{3}}\,\Theta_1,$$

$$\Phi''\,\Theta_1' - \Phi\,\Theta_1 = 0.$$

Multiplizieren wir Gl. (28b) mit $(c^2)^{+\frac{2}{3}}$ und setzen

$$(c^2)^{+\frac{2}{3}}\,\Theta_1 = \Theta_2,$$

dann lauten die Taylorschen Gleichungen

$$\Phi''\,\Phi''' - \Phi\,\Phi'' = \Theta_2 \quad \ldots \ldots \quad (27\text{b}),$$

$$\Phi''\,\Theta_2' - \Phi\,\Theta_2 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (28\text{b}).$$

Dazu kommen wieder die Randbedingungen. Diese sind:

1. für die Strahlmitte

$$\Theta_2 = 1,$$

$$\frac{u}{U} = \text{endlich} \qquad \text{d. h.} \quad \Phi' = \text{endlich},$$

$$\frac{v}{U} = 0 \qquad \text{d. h.} \quad \Phi = 0;$$

2. für den Strahlrand

$$\Theta_2 = 0,$$

$$\Phi' = 0,$$

$$\Phi'' = 0 \quad \text{(wegen der Stetigkeit des Anschlusses).}$$

Die Randbedingung $\Theta_2' = 0$ ist bei der Taylorschen Lösung des Problems nicht erfüllt, so daß die Temperatur mit einer Unstetigkeit in der Tangente nach außen anschließt. Im Nullpunkt tritt auch hier die schon früher erwähnte Singularität, also unendliche Krümmung, auf. Die Lösung der Differentialgleichungen erfolgt wieder mit den Reihenansätzen (20) und (21)

$$\Phi = a_0\,\eta_1 + a_1\,\eta_1^{\frac{5}{2}} + a_2\,\eta_1^4 + a_3\,\eta_1^{\frac{11}{2}} + a_4\,\eta_1^7 + \ldots\ldots,$$

$$\Theta_2 = b_0 \quad + b_1\,\eta_1^{\frac{3}{2}} + b_2\,\eta_1^3 + b_3\,\eta_1^{\frac{9}{2}} + b_4\,\eta_1^6 + \ldots\ldots$$

Durch Einsetzen dieser Ansätze in die Differentialgleichungen und durch Vergleich gleich hoher Potenzen gewinnen wir für die Koeffizienten die Bestimmungsgleichungen:

$$\frac{225}{32}\,a_1^2 = 1$$

$$\frac{225}{2}\,a_1\,a_2 - \frac{15}{4}\,a_0\,a_1 = b_1$$

$$\frac{1485}{4}\,a_1\,a_3 + 288\,a_2^2 - 12\,a_0\,a_2 - \frac{15}{4}\,a_1^2 = b_2$$

$$\frac{3465}{4}\,a_1\,a_4 + \frac{3267}{2}\,a_2\,a_3 - \frac{99}{4}\,a_0\,a_3 - \frac{63}{4}\,a_1\,a_2 = b_3$$

$$\frac{26775}{16}\,a_1\,a_5 + 3528\,a_2\,a_4 + \frac{68607}{32}\,a_3^2 - 42\,a_0\,a_4 - \frac{57}{2}\,a_1\,a_3 - 12\,a_2^2 = b_4$$

$$\frac{11475}{4}\,a_1 a_6 + \frac{13005}{2}\,a_2 a_5 + \frac{35343}{4}\,a_3\,a_4 - \frac{255}{4}\,a_0\,a_5 - \frac{183}{4}\,a_1\,a_4 - \frac{147}{4}\,a_2\,a_3 = b_5,$$

$$\frac{45}{8} a_1 b_1 - a_0 b_0 = 0$$

$$\frac{45}{4} a_1 b_2 + 18 a_2 b_1 - a_0 b_1 - a_1 b_0 = 0$$

$$\frac{135}{8} a_1 b_3 + 36 a_2 b_2 + \frac{297}{8} a_3 b_1 - a_0 b_2 - a_1 b_1 - a_2 b_0 = 0$$

$$\frac{45}{2} a_1 b_4 + 54 a_2 b_3 + \frac{297}{4} a_3 b_2 + 63 a_4 b_1 - a_0 b_3 - a_1 b_2 - a_2 b_1 - a_3 b_0 = 0$$

$$\frac{225}{8} a_1 b_5 + 72 a_2 b_4 + \frac{891}{8} a_3 b_3 + 126 a_4 b_2 + \frac{765}{8} a_5 b_1 - a_0 b_4 - a_1 b_3 - a_2 b_2 - a_3 b_1 - a_4 b_0 = 0$$

$$\frac{135}{4} a_1 b_6 + 90 a_2 b_5 + \frac{297}{2} a_3 b_4 + 189 a_4 b_3 + \frac{765}{4} a_5 b_2 + 135 a_6 b_1 - a_0 b_5 - a_1 b_4 - a_2 b_3 - a_3 b_2 - a_4 b_1 - a_5 b_0 = 0$$

und daraus die ersten Koeffizienten

$$a_0; \quad a_1 = -\frac{4}{15}\sqrt{2}; \quad a_2 = \frac{2}{45} a_0; \quad a_3 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{14850} a_0^2 - \frac{14}{4455}\right)$$

$$a_4 = \frac{13}{1559250} a_0^3 + \frac{94}{467775} a_0; \quad \ldots$$

$$b_0 = 1; \quad b_1 = -\frac{\sqrt{2}}{3} a_0; \quad b_2 = \frac{1}{45} a_0^2 + \frac{4}{45}; \quad b_3 = \sqrt{2}\left(\frac{7}{5400} a_0^3 - \frac{41}{4050} a_0\right);$$

$$b_4 = \frac{13}{44550} a_0^4 - \frac{137}{334125} a_0^2 + \frac{68}{66825}.$$

Die übrigen Koeffizienten wurden durch Einsetzen der bereits berechneten in die Bestimmungsgleichungen gewonnen. Aus den Bedingungen

$$\Phi'(\eta_{1R}) = \Phi''(\eta_{1R}) = 0.$$

Zahlentafel 2.

η_1	Θ_2	Φ	$\frac{u}{U}$	$\left(\frac{u}{1{,}285\,U}\right)$[1]	$\eta_1 \Phi'$	$\frac{v}{U}$	$\left(\frac{v}{1{,}285\,U}\right)$[1]
0	1	0	1,285	(1)	0	0	(0)
0,1	0,981	0,12756	1,2509	(0,9716)	0,1258	— 0,00177	(— 0,001375)
0,2	0,947	0,2508	1,2029	(0,9345)	0,24438	— 0,0064	(— 0,00497)
0,3	0,902	0,3678	1,13623	(0,8823)	0,34087	— 0,0269	(— 0,0209)
0,4	0,8548	0,4783	1,0632	(0,8256)	0,42528	— 0,053	(— 0,0412)
0,5	0,795	0,5806	0,98175	(0,7625)	0,4909	— 0,0897	(— 0,0697)
0,6	0,744	0,6775	0,8964	(0,6962)	0,5378	— 0,13965	(— 0,1085)
0,7	0,685	0,7589	0,809	(0,6283)	0,5663	— 0,1935	(— 0,1503)
0,8	0,6265	0,834	0,722	(0,5608)	0,5776	— 0,2567	(— 0,199)
0,9	0,5658	0,905	0,6358	(0,4938)	0,5722	— 0,3328	(— 0,2585)
1	0,5062	0,9636	0,5519	(0,4287)	0,5519	— 0,4117	(— 0,3198)
1,1	0,4483	1,0152	0,4727	(0,3671)	0,51997	— 0,4952	(— 0,3846)
1,2	0,3873	1,0582	0,3955	(0,3072)	0,47456	— 0,5836	(— 0,4533)
1,3	0,3362	1,0941	0,3357	(0,2607)	0,4364	— 0,6577	(— 0,5108)
1,4	0,2817	1,1234	0,2595	(0,2016)	0,3633	— 0,7601	(— 0,5904)
1,5	0,2304	1,1467	0,2012	(0,1563)	0,3018	— 0,8449	(— 0,6562)
1,6	0,1858	1,1584	0,1467	(0,1139)	0,2347	— 0,923	(— 0,7169)
1,7	0,1415	1,1715	0,10298	(0,08)	0,17507	— 0,9864	(— 0,7739)
1,8	0,0945	1,1799	0,06709	(0,0521)	0,1207	— 1,0592	(— 0,8225)
1,9	0,0639	1,18598	0,0405	(0,0315)	0,07695	— 1,10903	(— 0,8614)
2	0,0281	1,18852	0,0212	(0,01647)	0,0224	— 1,146	(— 0,8901)
2,09	0	1,1894	0	(0)	0	— 1,1894	(— 0,9165)

[1] Die eingeklammerten Zahlen sind die auf die Scheitelhöhe 1 umgerechneten Geschwindigkeiten.

Diese Entwicklungen konvergieren in der Nähe des Randpunktes noch gut. Als Lösungen für Φ, u und Θ_2 haben wir

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= 1{,}285\,\eta_1 - 0{,}37712\,\eta_1^{\frac{5}{2}} + 0{,}05711\,\eta_1^4 - 0{,}0042869\,\eta_1^{\frac{11}{2}} + 0{,}0002759\,\eta_1^7 - \cdots \\ \frac{u}{U} &= 1{,}285 - 0{,}9428\,\eta_1^{\frac{3}{2}} + 0{,}22844\,\eta_1^3 - 0{,}02357795\,\eta_1^{\frac{9}{2}} + 0{,}00193137\,\eta_1^6 - \cdots \\ \Theta_2 &= 1 - 0{,}605749\,\eta_1^{\frac{3}{2}} + 0{,}125583\,\eta_1^3 - 0{,}014507\,\eta_1^{\frac{9}{2}} + 0{,}0011363\,\eta_1^6 - \cdots \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (29).$$

Der Randpunkt η_{1R} liegt bei 2,09.

Die Werte der Funktionen Φ, $\frac{u}{U}$, $\frac{v}{U}$ und Θ_2 finden sich in Zahlentafel 2, die dazu gehörigen Kurven in Bild 2. Die Profile sind wieder so gezeichnet, daß sie in den Scheiteln übereinstimmen.

Der Vergleich des Taylorschen Ergebnisses mit dem nach Prandtl gewonnenen zeigt, daß bis auf Unterschiede in der Form und der Lage des Randpunktes das Temperaturprofil und das Geschwindigkeitsprofil ihre Rollen vertauscht haben. Während bei der Taylorschen Lösung das Geschwindigkeitsprofil schneller absinkt als das Temperaturprofil, ist bei der Prandtlschen Lösung gerade das Umgekehrte der Fall. Eine Entscheidung darüber, welche der beiden Theorien in unserem Fall richtig ist, könnte nur durch das Experiment erbracht werden.

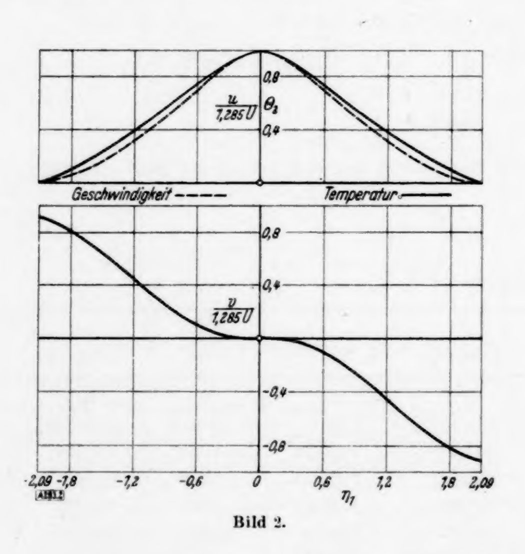


Bild 2.

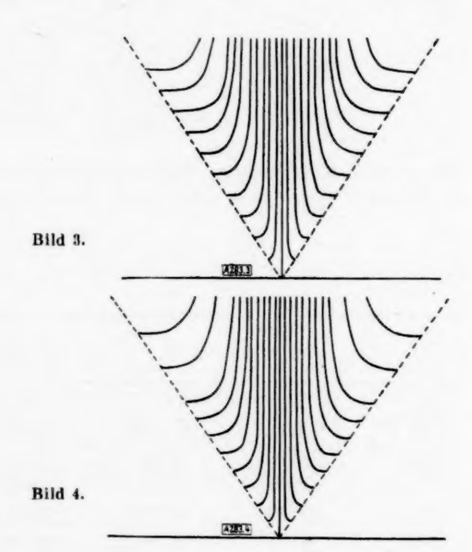


Bild 3.

Bild 4.

Stromlinien. Die Gleichung der Stromlinien lautet:

$$\Psi = x\,\Phi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30).$$

Läßt man Ψ nacheinander die Werte $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, ... 1... annehmen, so zeigen Zahlentafel 3 und das zugehörige Stromlinienbild, Bild 3, die Stromlinien nach Prandtl, Zahlentafel 4 und Bild 4 die Stromlinien nach Taylor.

Berechnung der Druckunterschiede. Bisher war die zwar nicht genau gültige, aber für die erste Näherung ausreichende Voraussetzung gemacht worden, daß der Druck in Querschnitten senkrecht zur Strömungsrichtung konstant ist.

In zweiter Näherung sollen nun aber auch die durch die berechneten Geschwindigkeiten und Spannungen hervorgerufenen Druckunterschiede mit berücksichtigt werden. Wir gehen von der zweiten Bewegungsgleichung aus:

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\right) - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

Zahlentafel 3.

	$\psi=\frac{1}{8}$		$\psi=\frac{1}{4}$		$\psi=\frac{3}{8}$		$\psi=\frac{1}{2}$		$\psi=\frac{5}{8}$		$\psi=\frac{3}{4}$	
η	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0,2	0,5565	0,113	1,13	0,226	1,6695	0,339	2,26	0,452	2,783	0,5625	3,39	0,678
0,4	0,2982	0,1194	0,5964	0,2385	0,8946	0,358	1,1924	0,477	1,491	0,5962	1,789	0,715
0,6	0,2131	0,128	0,4262	0,2557	0,6393	0,3835	0,8524	0,5114	1,0655	0,6392	1,279	0,767
0,8	0,174	0,139	0,3475	0,278	0,521	0,417	0,695	0,556	0,8687	0,695	1,0425	0,834
1	0,158	0,1577	0,31545	0,315	0,473	0,4132	0,631	0,631	0,7886	0,789	0,9464	0,9464
1,2	0,1403	0,1683	0,2805	0,337	0,421	0,5049	0,561	0,673	0,7012	0,842	0,8415	1,0098
1,4	0,1323	0,1851	0,2645	0,3703	0,397	0,555	0,529	0,741	0,6612	0,926	0,7935	1,119
1,6	0,1304	0,2082	0,26085	0,4174	0,3912	0,6245	0,522	0,837	0,6521	1,04085	0,7826	1,252
1,8	0,1298	0,2335	0,2595	0,467	0,3893	0,7005	0,519	0,934	0,6486	1,1675	0,7785	1,381
2	0,1291	0,258	0,2583	0,516	0,3874	0,714	0,517	1,033	0,6456	1,29	0,7748	1,548

	$\psi=\frac{7}{8}$		$\psi=1$		$\psi=1\frac{1}{4}$		$\psi=1\frac{1}{2}$		$\psi=1\frac{3}{4}$		$\psi=2$	
η	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0,2	3,8955	0,791	4,452	0,904	5,65	1,132	6,68	1,356	7,91	1,582	9,04	1,818
0,4	2,0874	0,835	2,385	0,9539	2,982	1,1924	3,577	1,431	4,175	1,669	4,77	1,908
0,6	1,4917	0,895	1,705	1,0228	2,131	1,2785	2,567	1,534	2,983	1,79	3,41	2,046
0,8	1,216	0,973	1,19	1,112	1,7375	1,39	2,085	1,668	2,433	1,946	2,776	2,2208
1	1,104	1,104	1,262	1,262	1,577	1,577	1,893	1,892	2,208	2,208	2,43	2,43
1,2	0,9818	1,178	1,122	1,346	1,403	1,683	1,683	2,02	1,964	2,356	2,244	2,6928
1,4	0,9258	1,296	1,058	1,481	1,323	1,852	1,587	2,222	1,852	2,592	2,116	2,9624
1,6	0,91297	1,475	1,0434	1,669	1,304	2,087	1,565	2,504	1,826	2,9215	2,087	3,3392
1,8	0,9083	1,635	1,038	1,868	1,298	2,325	1,557	2,802	1,817	3,269	2,076	3,7368
2	0,9038	1,806	1,033	2,066	1,291	2,58	1,5495	3,099	1,808	3,612	2,066	4,132

Zahlentafel 4.

	$\psi=\frac{1}{8}$		$\psi=\frac{1}{4}$		$\psi=\frac{3}{8}$		$\psi=\frac{1}{2}$		$\psi=\frac{5}{8}$		$\psi=\frac{3}{4}$	
η	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0,2	0,4984	0,09968	0,9968	0,1994	1,495	0,299	1,9936	0,399	2,492	0,498	2,99	0,598
0,4	0,2614	0,1045	0,5227	0,209	0,784	0,314	1,0454	0,418	1,307	0,523	1,568	0,627
0,6	0,1844	0,11063	0,3688	0,221	0,553	0,332	0,7375	0,4425	0,922	0,553	1,106	0,664
0,8	0,1498	0,1199	0,2996	0,2397	0,4495	0,3596	0,599	0,479	0,749	0,599	0,899	0,719
1	0,1287	0,1287	0,2595	0,2595	0,389	0,389	0,519	0,519	0,649	0,649	0,778	0,778
1,2	0,1181	0,1417	0,2362	0,2834	0,354	0,425	0,472	0,567	0,591	0,7086	0,709	0,85
1,4	0,1113	0,1558	0,2226	0,3116	0,334	0,467	0,451	0,623	0,556	0,779	0,676	0,9347
1,6	0,10735	0,1718	0,2147	0,3435	0,322	0,515	0,429	0,687	0,537	0,859	0,644	1,0306
1,8	0,10544	0,1898	0,2109	0,3796	0,316	0,569	0,422	0,759	0,527	0,949	0,633	1,1387
2	0,10517	0,2034	0,2103	0,419	0,3155	0,631	0,4207	0,8414	0,526	1,052	0,631	1,262
2,09	0,10513	0,2197	0,21026	0,439	0,3154	0,659	0,4205	0,8789	0,5257	1,099	0,629	1,318

	$\psi=\frac{7}{8}$		$\psi=1$		$\psi=1\frac{1}{4}$		$\psi=1\frac{1}{2}$		$\psi=1\frac{3}{4}$		$\psi=2$	
η	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0,2	3,489	0,698	3,987	0,797	4,984	0,9968	5,981	1,136	6,978	1,396	7,974	1,595
0,4	1,8295	0,7318	2,0908	0,836	2,614	1,0454	3,136	1,254	3,659	1,464	4,182	1,673
0,6	1,2907	0,774	1,475	0,885	1,844	1,106	2,213	1,328	2,581	1,549	2,95	1,77
0,8	1,049	0,839	1,1986	0,9589	1,498	1,1986	1,798	1,438	2,098	1,678	2,397	1,918
1	0,908	0,908	1,0378	1,0378	1,297	1,297	1,557	1,557	1,816	1,816	2,076	2,076
1,2	0,8267	0,992	0,9449	1,1339	1,181	1,417	1,417	1,701	1,653	1,984	1,89	2,27
1,4	0,7789	1,0903	0,8902	1,246	1,113	1,558	1,335	1,869	1,578	2,181	1,7804	2,493
1,6	0,7515	1,2023	0,8588	1,374	1,0735	1,718	1,288	2,061	1,503	2,405	1,718	2,748
1,8	0,738	1,3285	0,8435	1,518	1,054	1,898	1,265	2,2775	1,476	2,657	1,687	3,037
2	0,7362	1,4724	0,8414	1,683	1,0517	2,103	1,262	2,524	1,4724	2,945	1,683	3,365
2,09	0,7359	1,538	0,841	1,758	1,0513	2,197	1,2616	2,637	1,472	3,076	1,682	3,516

XUM

Diese Gleichung formen wir um, indem wir schreiben:

$$u\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial (u v)}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$v\frac{\partial v}{\partial y}=2v\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Dann ist

$$\frac{\partial (u v)}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial y}-v\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\right)-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}.$$

$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$ ist aber im Bereich unserer Näherung wegen der Kontinuitätsbedingung gleich Null, so daß wir nach Integration nach y erhalten

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^y u v\,\mathrm{d}y+[v^2]_0^y-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^y \tau'_{xy}\,\mathrm{d}y-\frac{1}{\varrho}[\sigma_y]_0^y=-\frac{1}{\varrho}[p]_0^y.$$

Setzen wir für τ'_{xy}, $\frac{u}{U}$, $\frac{v}{U}$ und σ_y ihre Werte ein — es ist

$$\sigma_y=2\varrho l^2\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\frac{\partial v}{\partial y}=-2\varrho c^2\Phi''^2\eta U^2 \quad -,$$

so lautet die Gleichung für die Druckverteilung

$$\frac{1}{\varrho}[-p]_0^\eta=\left\{\left[\frac{\Phi^2}{2}\right]_0^\eta-[2\eta\,\Phi\,\Phi']_0^\eta-\Phi''^2\,\eta+\int\eta\,\Phi'^2\,\mathrm{d}\eta-\int_0^\eta\Phi''^2\,\mathrm{d}\eta\right\}U^2 \text{ n. Prandtl} \quad \ldots (32\text{a}).$$

$$-\frac{1}{2}[p]_0^\eta=\left\{\frac{\Phi^2}{2}-\frac{\Phi''^2\eta}{2}-2\eta\,\Phi\,\Phi'+\int\eta\,\Phi'^2\,\mathrm{d}\eta-\int\frac{\Phi''^2}{2}\,\mathrm{d}\eta\right\}U^2 \text{ n. Taylor.}$$

Für die Druckdifferenz zwischen Strahlmitte und Strahlrand ergibt sich daraus

$$\left.\begin{aligned}\frac{p_m-p_R}{\varrho}&=0 &&\text{nach Prandtl}\\ \frac{p_m-p_R}{\varrho}&=0{,}837\,(c^2)^{\frac{2}{3}}\cdot U^2 &&\text{nach Taylor}\end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots (33\text{a}).$$

Nach **Prandtl** besteht also zwischen Strahlmitte und Strahlrand keine Druckdifferenz, nach **Taylor** dagegen ein kleiner Überdruck.

Um die Druckdifferenz gegenüber der ruhenden Luft zu erhalten, muß man berücksichtigen, daß am Strahlrand ein Unterdruck gleich dem Staudruck der radial zuströmenden Luft herrscht. Mit p_0 (Druck der ruhenden Luft) ergibt sich für diese Druckdifferenz

$$\left.\begin{aligned}p_m-p_0&=-0{,}3906\,(2\,c^2)^{\frac{2}{3}}\,U^2\varrho &&\text{nach Prandtl}\\ p_m-p_0&=-0{,}0011\,\;(c^2)^{\frac{2}{3}}\,U^2\varrho &&\text{nach Taylor}\end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots (33\text{b}).$$

Es ergibt sich also in der Strahlmitte gegenüber der ruhenden Außenluft nach **Prandtl** ein kleiner Unterdruck, nach **Taylor** ungefähr Gleichdruck.

Einfluß der Bodentopographie auf Strömungen über der rotierenden Erde.

Von H. Görtler in Göttingen.

(Aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung.)

Für den Einfluß von Bodenerhebungen auf den Verlauf der Strömungen im Meer und in der Atmosphäre wird eine quantitative Theorie der ersten Näherung für schwache Erhebungen entwickelt. Dabei wird der Einfluß der Sekundärströmung in der bodennahen Reibungsschicht mit erfaßt.

Einleitung.

Der Verlauf der Strömungen im Meer und in der Atmosphäre ist durch vielerlei Einflüsse bedingt (Erddrehung, Erdkrümmung, Bodengestalt, Veränderlichkeit der Dichte, Reibung, Wärmekonvektion, Strahlung, Feuchtigkeit der Luft, bei Meeresströmungen auch Windverteilung an der Meeresoberfläche sowie Verdunstung und Niederschlag usw.). Einer allgemeinen Theorie begegnen daher nicht zu bewältigende Schwierigkeiten. Man ist gezwungen, sich mit der Untersuchung wesentlich vereinfachter Modelle zu begnügen, die nur einzelnen Einflüssen Rechnung tragen und die übrigen ignorieren. Diese Zwangslage führt aber andererseits gerade zu einem tieferen Verständnis der Rolle, welche die einzelnen Einflüsse beim Zustandekommen der Strömung übernehmen, wenn auch selbstverständlich das wirkliche Zusammenwirken dieser vielerlei Einflüsse dann im allgemeinen nicht einfach durch Superposition erschlossen werden kann.

In der vorliegenden Arbeit wird die Frage nach dem Zusammenwirken von Erddrehung und Bodentopographie auf den Verlauf einer stationären (laminaren oder turbulenten) Strömung behandelt. Nur der Einfluß von Erdrotation, Bodenbeschaffenheit und Reibung steht zur Debatte, von allen anderen Einflüssen, auch von dem Einfluß der Erdkrümmung, wird abgesehen. Es wird also die Frage aufgeworfen: Wie strömt eine Flüssigkeit konstanter Dichte und endlicher Höhe stationär über weit ausgedehnte Bodenerhebungen auf der rotierenden Erde (ersetzt durch ihre Tangentialebene) und zwar unter Berücksichtigung der Reibung und damit der durch den Ausfall der Corioliskräfte in der bodennahen Schicht in Gang gesetzten Sekundärströmung?

Die Lösung dieses vereinfachten Problems kann zur Klärung der Anschauung über die Strömungserscheinungen sowohl im Meer als auch in einer stabil geschichteten Atmosphäre — hier ersetzt durch die gleichförmige Atmosphäre mit freier Oberfläche — beitragen. Im Rahmen von Betrachtungen über atmosphärische Strömungen findet sich eine Erörterung unseres Problems unter Vernachlässigung der Reibung in dem Beitrag von L. Prandtl zum Meteorologenkongreß in Edinburgh 1936 [5][1]). Für Meeresströmungen liegt in den verdienstvollen Arbeiten von V. W. Ekman eine weitentwickelte Theorie vor, die neben der Bodentopographie auch die Erdkrümmung und den Einfluß des Windes (Erzeugung des Oberflächenstromes) berücksichtigt. In seiner ersten Theorie [1] 1922 hat Ekman eine weitgehende Vereinfachung der hydrodynamischen Gleichungen vorgenommen, indem er die longitudinalen Trägheitskräfte gegenüber den Corioliskräften vernachlässigte. Dies ist aber selbst bei den kleinen im Meer vorkommenden Strömungsgeschwindigkeiten nicht zulässig. Ekman hat daher seine Theorie verbessert ([2] 1932) durch Mitnahme der zuvor vernachlässigten Trägheitsglieder, mußte aber dafür in Kauf nehmen, daß dies wesentliche Erschwerungen der Rechnung und eine erheblich verwickeltere Darstellung zur Folge hatte, die das Vordringen zu expliziten Ergebnissen nur unter weiteren Einschränkungen und in speziellen Fällen gestatteten.

Grundsätzlich stimmen die der folgenden Theorie zugrunde liegenden Anschauungen mit dem Standpunkt der neuen Ekmanschen Theorie der Meeresströmungen 1932 überein. Erst in der mathematischen Formulierung des Problems glauben wir einen Fortschritt erzielt zu haben. Wir gelangen zu Gleichungen, die einer expliziten Lösung zugänglich sind und zu sehr einfachen und in allen Phasen durchsichtigen Ergebnissen führen. Nach einer von der Ekmanschen Theorie unabhängigen Entwicklung und mathematischen Formulierung der allgemeinen Grundgleichungen unserer Theorie (Kapitel I) wird der zweidimensionale Fall (Strömung über langgestreckte Gebirgskämme) in allen Einzelheiten gelöst und an einem Beispiel diskutiert (Kapitel II). Auf Grund unseres heutigen Wissens auf dem Gebiet der turbulenten Strömungen kann die Größenordnung der für den Strömungsvorgang charakteristischen Parameter für die Verhältnisse im Meer und in der Atmosphäre abgeschätzt werden.

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Schrifttumverzeichnis am Schluß der Arbeit.

(Kapitel III). In Verbindung mit dieser Abschätzung lehrt die vorliegende Theorie, daß der Reibungseinfluß bei atmosphärischen und ozeanischen Strömungen für den Strömungsverlauf im allgemeinen von völlig untergeordneter Bedeutung ist.

Auch die Behandlung des dreidimensionalen Falles räumlich beliebig verteilter Bodenerhebungen sowie die Einbeziehung des Erdkrümmungseinflusses dürfte bei der vorliegenden mathematischen Formulierung der Theorie ohne erhebliche neue Schwierigkeiten zugänglich sein. Die Untersuchung dieser Fragen wird zur Zeit in Angriff genommen.

I. Voraussetzungen der Theorie und Ableitung der Grundgleichungen.

§ 1. Die hydrodynamischen Grundgleichungen. Die auf ein mit der Drehgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ rotierendes Koordinatensystem bezogenen Bewegungsgleichungen einer idealen Flüssigkeit lauten, wenn $\mathfrak{v}$ den Geschwindigkeitsvektor des Massenteilchens bezüglich des drehenden Systems, p den Druck, ϱ die Dichte und Φ ein Kräftepotential bedeuten, in Vektorschreibweise zusammengefaßt:

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = -\operatorname{grad}\Phi - \frac{1}{\varrho}\operatorname{grad} p + 2\,\mathfrak{v}\times\vec{\omega} \quad \ldots \quad (1.1).$$

Im Falle der Bewegung eines Flüssigkeitsteilchens auf der rotierenden Erdkugel setzt sich $-\operatorname{grad}\Phi$ additiv aus der Beschleunigung des Teilchens durch die Erdanziehung und der durch die Erdrotation hinzutretenden Zentrifugalbeschleunigung zusammen, stellt also die Schwerebeschleunigung $\mathfrak{g}$ am Ort des Teilchens dar. Gegenüber dem ruhenden System ist ferner die Coriolisbeschleunigung $2\,\mathfrak{v}\times\vec{\omega}$ hinzugekommen. Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ der Erddrehung hat den Betrag

$$\omega = \frac{2\pi}{\text{Sterntag}} = 7{,}292\cdot 10^{-5}\,\text{sec}^{-1}.$$

Während die Zentrifugalbeschleunigung als nur ortsabhängige Größe eine rein planetarische Wirkung der Erddrehung darstellt, äußert sich die von $\mathfrak{v}$ abhängende Coriolisbeschleunigung in einer durch den jeweiligen Strömungszustand bedingten Weise. Ihrem Einfluß ist die vorliegende Untersuchung in erster Linie gewidmet.

Zu den drei Eulerschen Impulserhaltungsgleichungen (1.1) tritt als vierte Bestimmungsgleichung für die unbekannten drei Geschwindigkeitskomponenten und den Druck die Massenerhaltungsgleichung

$$\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0 \quad \ldots \quad (1.2).$$

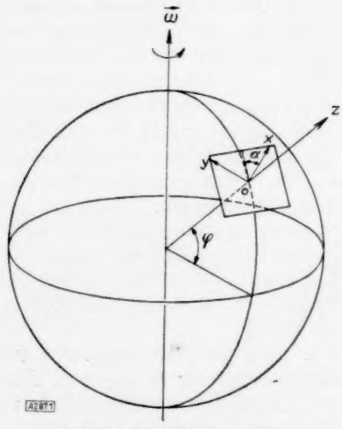


Bild 1. Koordinatenwahl.

§ 2. Koordinatenwahl. Den folgenden Rechnungen werde ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem x, y, z zugrunde gelegt. Sein Ursprung O möge mit irgendeinem festen Punkt der Erdoberfläche zusammenfallen. Während die z-Achse radial nach außen weisen soll, mögen die in der durch O gehenden Tangentialebene an die Erdkugel liegenden x- und y-Achsen so festgelegt sein, daß die positive x-Achse mit der von O aus in der Tangentialebene nach Norden weisenden Richtung den Winkel α bildet (Bild 1). An späterer Stelle soll die x-Richtung in besonderer Weise ausgezeichnet werden, wir halten daher zu diesem Zwecke den Winkel α frei verfügbar. Es sei ferner φ die geographische Breite des Ursprungs O.

Die Komponenten des Drehvektors $\vec{\omega}$ bezüglich der so definierten Achsenrichtungen lauten dann

$$\omega_x = \omega\cos\varphi\cos\alpha, \quad \omega_y = \omega\cos\varphi\sin\alpha, \quad \omega_z = \omega\sin\varphi\,.$$

Die entsprechenden Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ seien u, v, w.

§ 3. Die Voraussetzungen der Theorie. ① Wie bereits einleitend bemerkt, liegt die planetarische Wirkung der Erddrehung außerhalb des Interessenbereichs der vorliegenden Untersuchung. Wir beschränken uns in üblicher Weise auf eine gewisse Umgebung des Ortes O, in welcher wir die geographische Breite durch ihren konstanten Wert in O und die Erdoberfläche in diesem Bereich durch ihre Tangentialebene $z=0$ in O ersetzen. Dort ist dann ferner $\operatorname{grad}\Phi$ durch

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right]_0 = g(0) = g$$

zu nähern.

② Eine in der Theorie der ozeanischen und atmosphärischen Strömungen angebrachte Vernachlässigung beruht auf der verhältnismäßig geringen Höhe der betreffenden Flüssigkeitsschichten im Vergleich zu ihren horizontalen Ausdehnungen. Da die vertikalen Beschleunigungen nämlich auf nur kleinen Wegen wirksam sind relativ zu den langen Strecken, auf denen die horizontalen Beschleunigungen erfolgen, vernachlässigt man die ersteren und zwar einschließlich der vertikalen Coriolisbeschleunigung $2(u\,\omega_y - v\,\omega_x)$. In den strengen Eulergleichungen (1.1) für stationäre Strömungen in Komponentenschreibweise:

$$\left.\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \underbrace{w\frac{\partial u}{\partial z}}_{③} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + 2\omega\{v\sin\varphi - \underbrace{w\cos\varphi\sin\alpha}_{③}\}, \\ u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \underbrace{w\frac{\partial v}{\partial z}}_{③} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} + 2\omega\{\underbrace{w\cos\varphi\cos\alpha}_{③} - u\sin\varphi\}, \\ \underbrace{u\frac{\partial w}{\partial x}}_{②} + \underbrace{v\frac{\partial w}{\partial y}}_{②} + \underbrace{w\frac{\partial w}{\partial z}}_{②} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + 2\omega\{\underbrace{u\cos\varphi\sin\alpha}_{②} - \underbrace{v\cos\varphi\cos\alpha}_{②}\} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (3.1)$$

sind dann die mit darunter stehender Ziffer ② versehenen Glieder zu streichen, womit sich die dritte Eulergleichung auf die statische Grundgleichung reduziert.

③ Wir wollen ferner annehmen, daß die Höhendifferenzen der Bodenerhebungen im betrachteten Strömungsbereich klein seien gegenüber der Höhe H der Flüssigkeitsschicht. Ist etwa $z = \zeta(x, y)$ der Boden und an einer Stelle x_0, y_0 des Bereichs (etwa an einer Randstelle an der Einströmungsseite) $\zeta(x_0, y_0) = 0$ definiert, so soll im ganzen Bereich $|\zeta| \ll H$ sein. Ist die Länge B ein Maß für die horizontale Ausdehnung der betrachteten Bodenunebenheiten, so ist, insofern es sich um einen „glatten" Berg handelt, dann $|\text{grad}\,\zeta| \ll \frac{H}{B}$. Wir wollen dies aber nicht fordern, sondern nur die schwächere Voraussetzung machen, daß $|\text{grad}\,\zeta| \ll 1$ sei. Damit ist dann die Vertikalgeschwindigkeit w im Strömungsbereich klein gegenüber der horizontalen Geschwindigkeit u, v. Das hat zur Folge, daß in den Eulergleichungen (3.1) die mit darunter stehender Ziffer ③ gekennzeichneten Glieder ebenfalls zu vernachlässigen sind.

Die Ergebnisse der Rechnung werden die beiden letztgenannten Vernachlässigungen für alle interessierenden Strömungen über flache Bodenerhebungen sowohl bei ozeanischen wie bei atmosphärischen Verhältnissen bestätigen.

Die verbleibenden Gleichungen für u, v, w, p lauten nun:

$$\left.\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + 2\omega' v, \\ u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} - 2\omega' u, \\ 0 &= -g - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3.2).$$

Hierin ist zur Abkürzung

$$\omega' = \omega\sin\varphi \; (= \text{const})$$

gesetzt. Die Abhängigkeit von der Wahl von α ist in Fortfall gekommen.

Wir werden im folgenden immer annehmen, daß die Strömung bei Eintritt in den betrachteten Strömungsbereich eine von z unabhängige Verteilung der Horizontalgeschwindigkeit u, v besitzt, in diesem Sinne an der Eintrittsstelle also zweidimensional ist. Das ist etwa der Fall, wenn die Strömung als reine Parallelströmung über ebenem Boden ankommend den Strömungsbereich der Bodenerhebung erreicht. Wir erkennen aber sofort, daß die Strömung bei einer solchen Einströmungsbedingung dann im ganzen Strömungsbereich diesen Charakter bewahrt. Die Gln. (3.2) werden dann nämlich gelöst durch Ausdrücke u, v, w der Gestalt

$$\left.\begin{array}{ll} u = u(x,y), & v = v(x,y), \\ w = a(x,y)\cdot z + b(x,y) & \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (3.3).$$

Stromlinien, die an einem Orte durch eine Parallele zur z-Achse gehen, tun dies also an jedem Orte des Strömungsbereiches, und die Aufwärtsgeschwindigkeit hängt linear von z ab. In der Tat, nehmen wir der ersten Zeile von (3.3) gemäß u und v als von z unabhängig an, so folgt die zweite Zeile von (3.3) mit unbestimmten a, b aus der Kontinuitätsgleichung (1.2), weil dann $\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$ sein muß. Die gemachte Annahme rechtfertigt sich aber, indem nun u und v wie folgt als Funktionen von x und y allein bestimmt werden können: Durch Elimination von p aus den beiden ersten Eulergleichungen (3.2) erhält man eine erste, und aus der Kontinuitätsgleichung mit $\frac{\partial w}{\partial z} = a(x,y)$ eine zweite Differentialgleichung für u und v allein bezüglich der Veränderlichen x und y. Mit Hilfe der Randbedingungen bestimmen sich dann u, v und w in der Gestalt (3.3). Den Druck p gewinnt man aus den Eulergleichungen durch Integration in der Gestalt $p = -\varrho g z + p_1(x,y)$. Die hier geschilderten Rechenschritte werden in der nachfolgenden Theorie durchgeführt werden.

Es ist hier noch folgende Bemerkung am Platze. Hat man es nicht mit dem vorstehend geschilderten Problem zu tun, sondern mit einer Strömung über eine sich in ihrer Ebene drehende Scheibe, so fallen in den beiden ersten Eulergleichungen (3.1) gerade dieselben Glieder weg, die wir oben vernachlässigt haben (hier, weil $\omega_x = \omega_y = 0$, oben dagegen, weil w klein sein sollte). Macht man auch hier die Annahme, daß die vertikalen Beschleunigungsglieder zu vernachlässigen sind, und wählt man die Drehgeschwindigkeit $= \omega' = \omega \sin\varphi$, so hat man es also mit denselben Gln. (3.2) zu tun, die auf (3.3) führen. Man kann dann im Laboratoriumsversuch die Ergebnisse der Theorie mit befriedigender Genauigkeit nachprüfen. So waren uns die in der ersten Zeile von (3.3) zum Ausdruck kommenden Verhältnisse (Unabhängigkeit der Komponenten u und v von z) aus Strömungsversuchen im rotierenden Laboratorium des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Strömungsforschung, Göttingen, geläufig. Man kann sie durch Farbbahnen in einer mitrotierenden flüssigkeitserfüllten Schale bestätigen.

Im Hinblick darauf, daß die Horizontalkomponenten u und v eine zweidimensionale Geschwindigkeitsverteilung darstellen, zerlegen wir den Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ zweckmäßigerweise in

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{V}(x,y) + \mathfrak{w}(x,y,z) \quad \ldots \ldots \quad (3.4)$$

$$\text{mit } \mathfrak{V} = \{u, v, 0\},$$

$$\mathfrak{w} = \{0, 0, w\}$$

und behandeln diese Vektoren gesondert. Um Verwechslungen zu vermeiden, schreiben wir im Gegensatz zu den dreidimensionalen Differentialoperatoren die entsprechenden zweidimensionalen mit großen Anfangsbuchstaben:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Grad} f = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right\}, \\[2ex] \operatorname{Div} \mathfrak{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y}, \\[2ex] \operatorname{Rot} \mathfrak{a} = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \quad \text{(skalar!)} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (3.5).$$

Wir bringen nun noch zwei bekannte Tatsachen in Erinnerung. Soll eine Flüssigkeit gezwungen werden, über ebenem horizontalem Boden mit konstanter Geschwindigkeit $\mathfrak{v} = \mathfrak{V}_0 = \{u_0, v_0\}$ zu strömen, so müssen die durch $\mathfrak{V}_0$ erzeugten Coriolisbeschleunigungen mit einem entsprechenden Druckgefälle im Gleichgewicht stehen. Aus (3.2) ergibt sich durch Integration

$$p = -\varrho g z + 2\omega' \varrho (v_0 x - u_0 y) \quad \ldots \ldots \quad (3.6);$$

demzufolge muß die freie Oberfläche ($p = \text{const}$) die bekannte Spiegelneigung besitzen.

Jeder freien oder erzwungenen Bewegung entspricht vermöge der entstehenden Corioliskräfte ein seitwärts gerichteter Drang. Bei freien waagrechten Bewegungen ergibt sich eine Ablenkung (nach rechts auf der Nordhalbkugel, nach links auf der Südhalbkugel), deren Größe man unter Heranziehung des Begriffs des „Pendeltages" zu veranschaulichen pflegt $\Big($d. i. die Zeit, die ein Foucaultsches Pendel braucht, um eine volle Drehung von 360° zurückzulegen, also $\frac{1 \text{ Sterntag}}{\sin\varphi}\Big)$. Ein Massenpunkt beschreibt dann in einem halben Pendel-

tag einen vollen Kreis, den „Trägheitskreis" (insoweit die Veränderlichkeit von φ bedeutungslos bleibt; in der Äquatorgegend ergeben sich mit Berücksichtigung dieser Veränderlichkeit in erster Näherung Kurven vom Typ der Elastica, s. L. Prandtl [4]). Der Radius dieses Trägheitskreises ist also

$$R = \frac{V_0}{2\,\omega'} \qquad (3.7),$$

wenn V_0 der konstante Betrag der Geschwindigkeit des Massenpunkts ist.

§ 4. Berechnung der Aufwärtsgeschwindigkeiten einer Strömung über unebenem rotierendem Boden unter Berücksichtigung der Sekundärströmung in der bodennahen Reibungsschicht. Gegenüber den bisher geschilderten Verhältnissen treten ganz neue Erscheinungen auf, wenn man die Reibung berücksichtigt. Die Reibungswirkung entfaltet sich in der relativ dünnen bodennahen Grenzschicht, in der die Strömungsgeschwindigkeit wegen des Haftens am Boden auf Null absinkt. Das Druckfeld in der darüberliegenden Hauptströmung, in der die Reibung vernachlässigt werden kann, setzt sich, wie man aus den Grundgesetzen der Grenzschichttheorie weiß, praktisch unverändert durch die Grenzschicht fort. Hier in der Grenzschicht gehen aber die Geschwindigkeiten gegen Null, die ihnen entsprechenden Corioliskräfte können nicht mehr denselben Anteil zum Kräftegleichgewicht wie in der Hauptströmung beitragen. Demzufolge wird in der Grenzschicht eine Sekundärströmung in Gang gesetzt. Diese verläuft umgekehrt zur Richtung der ausfallenden Corioliskräfte und damit in der Grundrißprojektion senkrecht zur Hauptströmung. Sie erfolgt in solcher Stärke, daß die durch sie hervorgerufenen Reibungskräfte am Boden das Gleichgewicht gerade wiederherstellen.

Liegt etwa eine geradlinig-gleichförmige Hauptströmung vor, so bleiben die Vorgänge in der Grenzschicht ohne Einfluß auf die Hauptströmung. Es erfolgt in der Grenzschicht durch die zusätzliche dazu senkrechte Sekundärströmung lediglich insgesamt eine Strömung, die schräg zur Hauptströmung verläuft. Liegt jedoch etwa eine nicht drehungsfreie Hauptströmung vor, so läßt schon die Anschauung erwarten, daß die horizontale Sekundärströmung, da sie nicht mehr divergenzfrei sein wird, aus Kontinuitätsgründen nur dann bestehen kann, wenn ein entsprechender vertikaler Massenzufluß von bzw. zu der Hauptströmung erfolgt. So kann die Sekundärströmung in der relativ dünnen Bodenschicht unter Umständen eine stark eingreifende Wirkung auf die Hauptströmung ausüben. Es ist daher von praktischem Interesse, den Einfluß der Reibung zu untersuchen. Wir wollen zunächst zeigen, wie der Reibungseinfluß für die Rechnung zweckmäßig erfaßt werden kann. Wir werden dabei zugleich die eben gemachten mehr anschaulich-orientierenden Bemerkungen in präzisierter Form bestätigt finden.

Ist $\mathfrak{v}_s$ der waagrechte Geschwindigkeitsvektor der Sekundärströmung in der Grenzschicht, so ist der durch diesen bewirkte sekundliche Massenstrom $\mathfrak{M}$ durch

$$\mathfrak{M} = \varrho \int_{\zeta}^{\zeta+\delta} \mathfrak{v}_s \, d\,z \qquad (4.1)$$

gegeben, wo δ die Grenzschichtdicke und $z = \zeta\,(x, y)$ den Boden bezeichnen. Zur Erhaltung der Masse muß eine Vertikalgeschwindigkeit w_s vermöge

$$\operatorname{Div} \mathfrak{v}_s + \frac{\partial w_s}{\partial z} = 0$$

vorhanden sein, also

$$\operatorname{Div} \mathfrak{M} + \varrho\, w_g = 0 \qquad (4.2),$$

wo $w_g = [w_s]_{z=\zeta+\delta}$ die durch die Sekundärströmung in Gang gesetzte Aufwärtsbewegung am Rande der Grenzschicht darstellt ($[w_s]_{z=\zeta} = 0$ wegen des Haftens am Boden).

Die Grenzschichtströmung am Boden können wir uns nun in folgender Weise ersetzt denken: Die Hauptströmung fließt reibungslos über einen um die Verdrängungsdicke der Grenzschicht nach oben versetzten Boden. Die von der Sekundärströmung in der Grenzschicht zu liefernde, jeweils von der Hauptströmung abhängige Vertikalgeschwindigkeit an diesem Ersatzboden kann man sich dann als von einer geeignet dort anzubringenden Quellen- und Senkenverteilung herrührend denken. Unter $z = \zeta\,(x, y)$ soll im weiteren dieser so gegen den wahren Boden vesetzte neue Boden verstanden werden.

Unter Berücksichtigung der Richtung des Massenflusses schreiben wir

$$\mathfrak{M} = \varrho\, h\, \mathfrak{V} \qquad (4.3),$$

wo $\mathfrak{B} = \{-v, u\}$ aus $\mathfrak{B}$ durch Drehung um einen rechten Winkel nach links hervorgeht und h einen Proportionalitätsfaktor von der Dimension einer Länge bezeichnet, dessen Vorzeichen durch $\operatorname{sign} h = \operatorname{sign} \sin \varphi$ festgelegt ist. Wir werden, um Vorzeichenunterscheidungen zu vermeiden, unsere Aussagen im folgenden immer für die nördliche Halbkugel formulieren ($h > 0$). h ist die Dicke jener Flüssigkeitsschicht, durch die mit der festen Geschwindigkeit $\mathfrak{B}$ dieselbe Menge pro Zeiteinheit befördert würde, wie jene, die in Wirklichkeit durch die Sekundärströmung am betreffenden Ort in der Grenzschicht horizontal versetzt wird.

Bei laminarer Strömung über ebenem Boden mit konstanter Geschwindigkeit $\mathfrak{B}_0 = \{u_0, v_0\}$ außerhalb der bodennahen Reibungsschicht läßt sich die Geschwindigkeitsverteilung berechnen (siehe [6]), und es kann in elementarer Weise gefolgert werden, daß in diesem Falle

$$h = \text{Zahl} \sqrt{\frac{\nu}{\omega'}},$$

also von der jeweiligen Geschwindigkeit $\mathfrak{B}_0$ unabhängig ist. Dasselbe gilt natürlich auch für entsprechende turbulente Strömungen insoweit, als man in üblicher Weise, den erhöhten Austausch durch eine vergrößerte konstante Zähigkeit in Rechnung setzen kann. Für unsere Theorie des Einflusses schwacher Bodenerhebungen genügt es für eine erste Näherung, auch hier h als geschwindigkeitsunabhängig anzunehmen. Streng aber muß man h als von $\mathfrak{B}$ abhängig, und also bei gegebenem $\mathfrak{B}(x, y)$ als $h = h(x, y)$ annehmen. Um uns die Möglichkeit dieser Verbesserung offenzuhalten (siehe § 11), sehen wir h im folgenden als veränderlich an.

Es ist

$$\operatorname{Div} \mathfrak{M} = \varrho \operatorname{Div} (h \mathfrak{B}) = -\varrho \operatorname{Rot} (h \mathfrak{B}).$$

Somit ist die von der Quellen- und Senkenbelegung geliefert zu denkende Aufwärtsgeschwindigkeit am Boden

$$w_g = \operatorname{Rot} (h \mathfrak{B}) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4.4).$$

Fließt nun die Hauptströmung über den durch $z = \zeta(x, y)$ gegebenen Boden, so erfährt sie hierdurch die Aufwärtsgeschwindigkeit

$$w_0 = \mathfrak{B} \circ \operatorname{Grad} \zeta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4.5).$$

Somit ergibt sich für die Aufwärtsgeschwindigkeit w in der Hauptströmung mit Rücksicht auf (3.3) insgesamt:

$$w = (w_0 + w_g) \frac{H - z}{H - \zeta} + w_H \frac{z - \zeta}{H - \zeta} \quad \ldots \ldots \quad (4.6),$$

wo $H(x, y)$ die freie Oberfläche der Strömung und $w_H(x, y)$ die Vertikalgeschwindigkeit an dieser Oberfläche bezeichnen. Die Rechnung wird bestätigen, daß man für $|\zeta| \ll H$ in einer befriedigend großen Umgebung von O die freie Oberfläche H in allen uns interessierenden Fällen durch ein mittleres konstantes $\overline{H}$ ersetzen kann. Wir werden dies noch ausführlich diskutieren (siehe § 14). Wir haben dann

$$w = \frac{\overline{H} - z}{\overline{H} - \zeta} \{\mathfrak{B} \circ \operatorname{Grad} \zeta + \operatorname{Rot} (h \mathfrak{B})\} \quad \ldots \ldots \quad (4.7).$$

§ 5. Ableitung der Ausgangsgleichungen der weiteren Theorie. Wir haben nun alle Vorbereitungen getroffen, um die grundlegenden Gleichungen der nachfolgenden Theorie zu formulieren. Die beiden ersten Eulergleichungen (3.2) liefern für die Hauptströmung nach Elimination des Druckes die Beziehung

$$\mathfrak{B} \circ \operatorname{Grad} \operatorname{Rot} \mathfrak{B} + \operatorname{Div} \mathfrak{B} (\operatorname{Rot} \mathfrak{B} + 2\omega') = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5.1),$$

und die Kontinuitätsgleichung ergibt mit Rücksicht auf (4.7) und wegen $\operatorname{Div} \mathfrak{B} = -\frac{\partial w}{\partial z}$

$$(\overline{H} - \zeta) \operatorname{Div} \mathfrak{B} = \mathfrak{B} \circ \operatorname{Grad} \zeta + \operatorname{Rot} (h \mathfrak{B}) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5.2).$$

Diese beiden Gleichungen für u und v bilden die Grundlage der weiteren Rechnung, in der zunächst einmal der Fall der Strömung über langgestreckte Gebirgskämme behandelt werden soll, für den eine Erniedrigung der Dimensionszahl möglich ist. $\mathfrak{B}$, das im allgemeinen Fall von x und y abhängt, wird dann nur von einer einzigen Veränderlichen abhängen, womit (5.1) und (5.2) sich auf gewöhnliche Differentialgleichungen für u und v reduzieren. Sind u und v bestimmt, so kann man nachher w und p in elementarer Rechnung ermitteln, und zwar w am bequemsten aus

$$w = (\overline{H} - z) \operatorname{Div} \mathfrak{B} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5.3).$$

XUM

Es sei nun noch bemerkt, daß man zunächst versucht sein wird, die Gln. (5.1) und (5.2) für sehr kleine Geschwindigkeiten $\mathfrak{V}$ zu behandeln. Dazu würde man (5.1) unter Streichung der in $\mathfrak{V}$ und dessen Ableitungen quadratischen Glieder durch

$$\mathrm{Div}\,\mathfrak{V} = 0$$

ersetzen und somit nach (5.2)

$$\mathrm{Rot}\,h\,\mathfrak{V} = -\mathfrak{V} \circ \mathrm{Grad}\,\zeta$$

erhalten. Physikalisch bedeutet dies die Vernachlässigung der longitudinalen Trägheitsglieder gegenüber den in den Geschwindigkeiten linearen Coriolisgliedern in den Eulerschen Gleichungen. V. W. Ekman ist ursprünglich in seiner Theorie der Meeresströmungen 1922 sinngemäß von diesem Gedanken ausgegangen (s. [1]), da bei den kleinen Geschwindigkeiten im Meer die vorkommenden Trägheitskreisradien klein sind im Vergleich zu den in Frage kommenden horizontalen Abmessungen der Bodenerhebungen. Allein es hat sich gezeigt — und dies wird auch in der vorliegenden Untersuchung klar hervortreten —, daß selbst bei Meeresströmungen diese Trägheitsbeschleunigungen eine wesentliche Rolle spielen und die Strömungen gänzlich von denen verschieden sind, die bei einem bedeutenden Überwiegen der Coriolisbeschleunigungen resultieren würden. Selbst eine iterative Verbesserung des oben skizzierten Näherungsansatzes reicht nicht aus, um zu praktisch interessierenden Ergebnissen zu gelangen. Unsere Rechnungen werden also keine diesbezüglichen Voraussetzungen machen, sondern auf den vollständigen Gln. (5.1) und (5.2) gegründet sein.

Wesentliche Voraussetzungen unserer Theorie werden neben dem bewußten Absehen von planetarischen Einflüssen (Ersatz der Erdoberfläche durch ihre Tangentialebene und der variablen Breite durch einen mittleren konstanten Wert) also allein die relative Flachheit der Strömungsräume und in diesen Räumen die relative Kleinheit der Bodenerhebungen ζ gegenüber der Schichthöhe $\overline{H}$ sein.

II. Vollständige Lösung des Problems für den zweidimensionalen Fall.

In diesem Kapitel II soll zunächst die allgemeine mathematische Berechnung und Diskussion des zweidimensionalen Falles durchgeführt werden, worauf in Kapitel III die Ergebnisse speziell auf Strömungen im Meer und in der Atmosphäre angewendet werden sollen.

§ 6. Vereinfachung des Problems im zweidimensionalen Fall. Wir nehmen an, daß die Bodenfläche ζ und damit die Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ von y unabhängig sind. Es bezeichne $\mathfrak{V}_0 = \{u_0, v_0\}$ die Strömungsgeschwindigkeit an der Eintrittsstelle $x = x_0$ der Strömung in den betrachteten Strömungsbereich $x_0 \leqq x \leqq x_1$, in welchem sich die uns interessierende Bodenerhebung befindet. Wir setzen fest, daß $\zeta(x_0) = 0$ sein soll, was lediglich die Festlegung des Niveaus der x, y-Ebene bedeutet. Ferner soll, um hydrodynamisch saubere Bedingungen zu schaffen, angenommen werden, daß das Medium für $x \leqq x_0$ über ebenem Boden $\zeta \equiv 0$ ströme. Hier ist also auch noch ungestört $\mathfrak{V} \equiv \mathfrak{V}_0$. Es ist $\zeta(x)$ als überall stetig und stetig-differenzierbar vorausgesetzt, und es soll also auch $\frac{d\zeta}{dx}(x_0) = 0$ sein. In x_0 (oder weiter stromabwärts) beginnt die Bodenerhebung oder -senkung.

Die Gl. (5.1) vereinfacht sich nun auf

$$\frac{d}{dx}\left\{u\frac{dv}{dx} + 2\,\omega' u\right\} = 0 \quad \text{(6.1)},$$

also nach einmaliger Integration unter Beachtung der Randbedingungen

$$u\frac{dv}{dx} + 2\,\omega'(u - u_0) = 0 \quad \text{(6.2)}.$$

Hinzu kommt die Gl. (5.2), welche nun in der Gestalt

$$\frac{d}{dx}\{(\overline{H} - \zeta)\,u - h\,v\} = 0 \quad \text{(6.3)}$$

geschrieben werden kann und integriert

$$(\overline{H} - \zeta)\,u - h\,v = c_0 \quad \text{(6.4a)}$$

(c_0 Integrationskonstante) ergibt.

Wie bereits in § 4 bemerkt, ist die für den Reibungseinfluß maßgebende Länge h im allgemeinen abhängig von der Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$. Unsere Kenntnisse über die Gesetze turbu-

XUM

lenter Strömung reichen aus, um für diese Abhängigkeit wenigstens eine Abschätzung zu geben. Dies soll an späterer Stelle (Kapitel III) geschehen. Zunächst aber denken wir uns die Länge h durch einen konstanten mittleren Wert im Strömungsbereich ersetzt. Mit $h = \text{const}$ erzielen wir einfache Formeln. Es wird Aufgabe einer dann folgenden Untersuchung (§ 11) sein, den Einfluß der Veränderlichkeit von h auf die Ergebnisse der Rechnung zu untersuchen. Es wird sich zeigen, daß unser vorläufiger Ersatz von h durch einen Mittelwert in weiten Grenzen eine gute Näherung gibt. Wenn wir hier vorwegnehmen, daß in Verbindung mit den folgenden Rechnungen die oben angekündigte Abschätzung des Kapitels III den Einfluß der Reibung als eine bei ozeanischen und atmosphärischen Strömungen im allgemeinen belanglose Größe nachweisen wird, wird der Leser den Ersatz von h durch einen Mittelwert mit dem Ziele einer ersten Näherung billigen.

Mit $h = \text{const}$ wird in (6.4 a) wegen $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_0$ und $\zeta = 0$ in $x = x_0$ die Integrationskonstante $c_0 = \overline{H}\,u_0 - h\,v_0$, also

$$v - v_0 = \frac{\overline{H} - \zeta}{h}\,u - \frac{\overline{H}}{h}\,u_0 \qquad (6.4).$$

Aus den Gln. (6.2) und (6.4) mit $h = \text{const}$ stellen wir eine Differentialgleichung für die Geschwindigkeitskomponente u allein her. Indem wir aus beiden Gleichungen $\frac{d\,v}{d\,x}$ berechnen, erhalten wir nach Gleichsetzen der gewonnenen Ausdrücke

$$u\,\frac{d}{d\,x}\,(\overline{H} - \zeta)\,u + 2\,\omega'\,h\,(u - u_0) = 0 \qquad (6.5).$$

Hat man aus dieser nicht-linearen Differentialgleichung u ermittelt, so ergibt sich durch Einsetzen in (6.4) sofort auch v. Das Problem ist alles in allem auf eine mathematisch verhältnismäßig einfache Fragestellung zurückgeführt worden.

Die Behandlung der verbleibenden Differentialgleichung (6.5) wird aber nun noch wesentlich erleichtert durch folgende Bemerkung. Daß wir gerade für die Komponente u allein eine Differentialgleichung herstellten, hat seinen Grund darin, daß dies dem Problem besonders angepaßt ist. Es wird (siehe § 8 und allgemein für variables h auch § 11) leicht einzusehen sein, daß mit $|\zeta|_{\text{Max}} \ll \overline{H}$ die Störung von u durch die Bodenerhebung, d. h. die Differenz $u - u_0$, dem Betrage nach klein gegenüber u_0 von mindestens derselben Ordnung ist. Eine bezüglich $\zeta / \overline{H}$ linearisierte Theorie, wie sie in unseren bisherigen allgemeinen Entwicklungen des ersten Kapitels vorliegt, hat also konsequenterweise stets auch eine Linearisierung bezüglich der relativen u-Störung zur Folge. Es wäre dagegen unzweckmäßig gewesen, eine (nichtlineare) Differentialgleichung für v allein herzustellen, denn die Störungen $v - v_0$ bleiben in den physikalisch interessierenden Fällen im allgemeinen durchaus nicht klein gegenüber dem Betrag der ungestörten Anströmgeschwindigkeit $\mathfrak{V}_0$.

§ 7. Einführung dimensionsloser Größen. Bevor wir fortfahren, wird es zweckmäßig sein, die auftretenden Veränderlichen auf charakteristische Größen zu beziehen, um dann in dimensionsloser Schreibweise bequemer die Größenordnung der sich ergebenden Ausdrücke überblicken zu können.

Es sei B eine charakteristische Länge, durch welche die waagrechte Breitenerstreckung der betrachteten, in $x = x_0$ beginnenden Bodenerhebung und damit des zugrunde liegenden Strömungsbereichs in x-Richtung definiert ist. Auf diese beziehen wir alle horizontalen Längenmessungen als Einheit. Die vertikalen Abmessungen beziehen wir dagegen auf $\overline{H}$. Ferner erweist es sich als zweckmäßig, alle Geschwindigkeiten auf die zum Bergkamm senkrecht gerichtete Komponente u_0 der ungestörten Anströmungsgeschwindigkeit in $x = x_0$ zu beziehen.

Um die Schreibweise einfach zu halten, wollen wir vereinbaren, daß für alle folgenden Ausführungen unter x^*, y^*, z^*, ζ^*, H^*, u^*, v^*, w^*, u_0^*, v_0^* die bisher benutzten dimensionsbehafteten Größen zu verstehen sind, während für das Weitere die entsprechenden nicht mit einem Stern versehenen Größen ausschließlich die folgenden Dimensionslosen sein sollen, mit denen fortan gerechnet wird:

$$\left.\begin{aligned} &x = \frac{x^*}{B}, \quad y = \frac{y^*}{B}, \\ &z = \frac{z^*}{\overline{H}}, \quad \zeta = \frac{\zeta^*}{\overline{H}}, \quad H = \frac{H^*}{\overline{H}}, \\ &u = \frac{u^*}{u_0^*}, \quad v = \frac{v^*}{u_0^*}, \quad w = \frac{w^*}{u_0^*}, \quad v_0 = \frac{v_0^*}{u_0^*}, \quad p = \frac{p^*}{\varrho\,u_0^{*2}} \end{aligned}\right\} \qquad (7.1).$$

Die Größen B, $\overline{H}$ und h bleiben nach wie vor dimensionsbehaftet. Die Dimensionslosen x und z sind im interessierenden Bereich des Berges und seiner Umgebung von der Größenordnung $O(1)$. Nach Voraussetzung ist ferner $|\zeta| \ll 1$. Behalten wir dies im Auge, so ist es leicht, sich in jedem Stadium der folgenden Rechnung einen Überblick über die auftretenden Größenordnungen zu verschaffen.

Als charakteristisch für die hier behandelten Vorgänge der Stromablenkung durch Bodenerhebungen auf der rotierenden Erde erweisen sich die Dimensionslosen $\frac{h}{\overline{H}}$ und $\frac{R}{B}$, wo

$$R = \frac{u_0^*}{2\omega'} \quad \quad (7.2)$$

den zu u_0^* gehörigen Trägheitskreisradius bezeichnet. (Damit hängt es zusammen, daß man gerade mit der u-Komponente der Anströmgeschwindigkeit als Bezugsgeschwindigkeit eine einfache Schreibweise der dimensionslosen Gleichungen erzielt.)

Neben den eben genannten Dimensionslosen verwenden wir noch ihr Verhältnis, die Zahl

$$G = \frac{R}{B} : \frac{h}{\overline{H}} \quad \left(= \frac{u_0^* \overline{H}}{2\omega' B h} \right) \quad \quad (7.3).$$

Dieser Zahl G wird im weiteren eine wesentliche Rolle zufallen.

Die Bestimmungsgleichungen (6.5), (6.4) und (5.3) für die Geschwindigkeitskomponenten schreiben sich in den eingeführten Dimensionslosen wie folgt:

$$G\, u \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \{(1-\zeta)\, u\} + u - 1 = 0 \quad \quad (7.4),$$

$$v - v_0 = \frac{\overline{H}}{h} \{(1-\zeta)\, u - 1\} \quad \quad (7.5),$$

$$w = \frac{\overline{H}}{B} (1-z) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \quad \quad (7.6).$$

Nebenbei, der Standpunkt der älteren Ekmanschen Theorie der Meeresströmungen aus dem Jahre 1922 [1], nämlich: Vernachlässigung der longitudinalen Trägheitsbeschleunigungen gegenüber den Coriolisbeschleunigungen, würde in unseren Gleichungen dadurch zum Ausdruck kommen, daß $R = 0$ und also auch $G = 0$ zu setzen wäre. In diesem Grenzfall ergibt sich nach unserer Theorie bereits das fertige Resultat:

$$u = 1, \qquad v = v_0 - \frac{\overline{H}}{h} \zeta, \qquad w = 0 \quad \quad (7.7),$$

und als Projektion der Stromlinien der Hauptströmung auf die x, y-Ebene demnach

$$y - y_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{v}{u}\, \mathrm{d}x = v_0 (x - x_0) - \frac{\overline{H}}{h} \int_{x_0}^{x} \zeta\, \mathrm{d}x \quad \quad (7.8).$$

Diese Stromlinien haben über den Extrema von ζ (Bergkamm, Talboden) Wendepunkte, wie dies V. W. Ekman [1], S. 109, auch nach seiner damaligen Theorie am speziellen Beispiel eines sinusförmig gewellten Bodens in einer Figur demonstrierte. Die für normale Meeresströmungen und atmosphärische Strömungen anzunehmenden Werte von G sind aber nicht klein, sondern im allgemeinen sogar so groß, daß die resultierenden Strömungen in ihrem Verlauf einen vom Falle $G = 0$ gänzlich abweichenden Charakter haben. Dieser wird aber durch einen anderen Grenzfall, nämlich den der reibungslosen Strömung ($h = 0$, also $G = \infty$), genähert, wie wir noch sehen werden.

§ 8. Geschwindigkeitsverteilung und Stromablenkung. Für das in x stetige und stetig-differenzierbare Bodenprofil $\zeta(x)$ bestehen auf Grund unserer allgemeinen Theorie des ersten Kapitels die Beschränkungen, daß im Strömungsbereich $|\zeta| \ll 1$ und ferner $\left|\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x}\right| \ll \frac{B}{\overline{H}}$ sein soll (letzteres als Garantie für das Kleinbleiben der Vertikalkomponente w der Strömungsgeschwindigkeit). Bei den ins Auge gefaßten Anwendungen ist $B/\overline{H}$ eine gegen 1 sehr große Zahl (z. B. 10^2), wie dies ja auch der gemachten Voraussetzung relativ flacher Strömungsräume entspricht. Für die folgenden Betrachtungen bedeutet daher die genannte Beschränkung von $\left|\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x}\right|$ keine weitere Vereinfachung. Glücklicherweise kommt man aber auch ohne schärfere Beschränkung von $\left|\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x}\right|$ aus, da sich im folgenden die Kleinheit von $|\zeta|$ bereits ohne Annahmen

über $\left|\frac{d\zeta}{dx}\right|$ als für die Durchführbarkeit der Rechnung ausreichend erweisen wird. Es werden also im weiteren keinerlei Voraussetzungen über Größenordnungen gemacht, die nicht schon der allgemeinen Theorie des ersten Kapitels zugrunde liegen. Im übrigen würde eine der Forderung an ζ entsprechende Forderung an $\frac{d\zeta}{dx}$, also $\left|\frac{d\zeta}{dx}\right| \ll 1$, eine den Gegebenheiten der geplanten Anwendungen nicht entsprechende Beschränkung bedeuten (siehe Bild 2a). Die von uns gemachte, wesentlich schwächere Voraussetzung: $\left|\frac{d\zeta}{dx}\right| \ll \frac{B}{\overline{H}}$ wird diesen jedoch schon eher gerecht (siehe Bild 2b, beachte aber, daß der wirkliche Strömungsraum im Verhältnis $B:\overline{H}$ gestreckt ist, d. h. $\left|\frac{d\zeta^*}{dx^*}\right| \ll 1$).



Bild 2a. $|d\zeta/dx| \ll 1$. Bild 2b. $|d\zeta/dx| \ll \frac{B}{\overline{H}}$.

Vorbehaltlich der Bestätigung durch die weitere Rechnung nehmen wir nun, wie bereits in § 6 angekündigt, an, daß die Störung der u-Komponente der Strömungsgeschwindigkeit durch die Bodenerhebung, d. h. also die Differenz $u-1$, dem Betrage nach klein gegen 1 ist von (mindestens) derselben ersten Ordnung, wie nach Voraussetzung $|\zeta|_{\text{Max}}$ klein im Vergleich zu 1 ist. Wir schreiben

$$u = 1 + \zeta_i \quad . \quad . \quad . \quad (8.1).$$

Die Bezeichnung „ζ_i" für die dimensionslose Störungsgröße ist einer später folgenden Deutung derselben bereits im voraus angepaßt.

Gehen wir mit diesem Ansatz (8.1) in die Differentialgleichung (7.4) für u ein, so ergibt sich:

$$G(1+\zeta_i)(1-\zeta)\frac{d\zeta_i}{dx} - G(1+\zeta_i)^2\frac{d\zeta}{dx} + \zeta_i = 0.$$

Für eine Berechnung der Störungsgröße ζ_i in erster Ordnung — nur diesen Anspruch kann unsere Theorie überhaupt stellen — erhalten wir somit wegen $|\zeta| \ll 1$ und unter der oben ausgesprochenen Annahme, daß daher auch $|\zeta_i| \ll 1$ ist, die folgende lineare Differentialgleichung erster Ordnung:

$$G\frac{d\zeta_i}{dx} + \zeta_i = G\frac{d\zeta}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad (8.2).$$

Berücksichtigt man die Randbedingung, daß in $x = x_0$ die Störungsgröße $\zeta_i = 0$ sein muß (dort ist $u = 1$), so erhält man für ζ_i als Lösung:

$$\zeta_i(x;G) = \int_{x_0}^{x} e^{-\frac{(x-\lambda)}{G}} \frac{d\zeta(\lambda)}{d\lambda} d\lambda \quad . \quad . \quad . \quad (8.3).$$

Durch partielle Integration folgt:

$$\zeta_i(x;G) = \zeta(x) - \frac{1}{G}\int_{x_0}^{x} e^{-\frac{(x-\lambda)}{G}} \zeta(\lambda)\, d\lambda \quad . \quad . \quad . \quad (8.4).$$

Die Bodenerhebung bedeckt nach Vereinbarung eine Strecke $x - x_0 = O(1)$. Man erkennt ohne weitere Erörterung, daß die bezüglich der Größenordnung von ζ_i gemachte Annahme bestätigt wird, und zwar für alle möglichen Werte von G ($\geqq 0$).

Indem wir die Gl. (8.2) als Differentialgleichung für $\zeta(x)$ auffassen, erhalten wir als Umkehrung von (8.4) die weitere wertvolle Beziehung

$$\zeta(x) = \zeta_i(x;G) + \frac{1}{G}\int_{x_0}^{x} \zeta_i(\lambda;G)\, d\lambda \quad . \quad . \quad . \quad (8.5).$$

Verwenden wir (8.6) gleich bei der Berechnung von v aus der — bezüglich ζ und ζ_i entsprechend zu linearisierenden — Gl. (7.5), so ergibt sich insgesamt folgende Geschwindigkeitsverteilung:

$$\left.\begin{aligned} u(x) &= 1 + \zeta_i(x; G) \\ v(x) &= v_0 - \frac{B}{R}\int_{x_0}^{x} \zeta_i(\lambda; G)\,\mathrm{d}\lambda \\ w(x, z) &= \frac{\overline{H}}{B}(1-z)\frac{\mathrm{d}\zeta_i}{\mathrm{d}x}(x; G) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8.6).$$

Es erhellt unmittelbar, daß die Störung $v - v_0$ der v-Komponente im allgemeinen durchaus nicht klein gegen 1 ist. Bei Meeresströmungen etwa interessiert gerade der Fall großer Werte von B/R.

Die Stromlinien der Hauptströmung ergeben in ihrer Projektion auf die x, y-Ebene ein Bild von der horizontalen Ablenkung der Hauptströmung. Diese Projektion berechnet sich aus $y - y_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{v}{u}\,\mathrm{d}x$ bei Linearisierung bezüglich ζ_i zu

$$\left.\begin{aligned} y - y_0 = v_0(x - x_0) &- v_0 \int_{x_0}^{x} \zeta_i(\lambda; G)\,\mathrm{d}\lambda \\ &- \frac{B}{R}\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}\lambda_1 \int_{x_0}^{\lambda_1} \zeta_i(\lambda; G)\,\mathrm{d}\lambda \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8.7).$$

Der von diesen Kurven mit der positiven x-Achse gebildete Winkel γ berechnet sich aus

$$\operatorname{tg}\gamma = v_0(1 - \zeta_i) - \frac{B}{R}\int_{x_0}^{x} \zeta_i\,\mathrm{d}\lambda \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8.8).$$

Ist $\operatorname{tg}\gamma_0 = v_0$, so ist also die Ablenkung $\gamma - \gamma_0$ gegenüber der Anströmungsrichtung gegeben durch

$$\operatorname{tg}(\gamma - \gamma_0) = -\left\{v_0\zeta_i + \frac{B}{R}\int_{x_0}^{x} \zeta_i\,\mathrm{d}\lambda\right\}\left\{1 + v_0^2(1 - \zeta_i) - \frac{B v_0}{R}\int_{x_0}^{x} \zeta_i\,\mathrm{d}\lambda\right\}^{-1} \quad \ldots (8.9).$$

Der Grenzfall verschwindender Reibung wird durch $h \to 0$, $G \to \infty$ gegeben. Es ist

$$\lim_{h \to 0} \zeta_i = \zeta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8.10).$$

Die Gln. (8.6) bis (8.9) sind bewußt in einer solchen Form geschrieben, daß man diesen Grenzfall unmittelbar erhält, indem man einfach ζ_i durch ζ ersetzt.

Das führt, umgekehrt aufgefaßt, zu einer wertvollen Deutung der Größe ζ_i: Es ist ζ_i jenes gedachte Bodenprofil, durch welches man das wirkliche Profil ζ ersetzen muß, wenn man bei entsprechender Rechnung ohne Berücksichtigung der Reibung dieselbe Hauptströmung erhalten will. Diese Deutung von ζ_i liefert uns in der Abweichung der Größe ζ_i von ζ direkt ein anschauliches Maß für den Reibungseinfluß.

Wenn man die Antwort auf die obige Fragestellung nach jener Bodenerhebung, welche bei Rechnung ohne Berücksichtigung der Reibung dieselbe Hauptströmung liefert wie der wirkliche Berg $\zeta(x)$ mit Berücksichtigung der Reibung, nicht direkt aus (8.6) nebst (8.10) abliest, sondern auf Grund der Gl. (5.2) zu beantworten sucht, so ist zu fordern, daß der Ersatzberg — nennen wir ihn jetzt vorübergehend $\tilde{\zeta}$ — der Gleichung

$$\mathfrak{V} \circ \operatorname{Grad}\tilde{\zeta} = \mathfrak{V} \circ \operatorname{Grad}\zeta + \frac{h}{H}\operatorname{Rot}\mathfrak{V}$$

genügt. Im vorliegenden zweidimensionalen Fall vereinfacht sich diese auf

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\zeta}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{u}\frac{h}{H}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

Es ist also die Steigung des Ersatzberges dort kleiner (größer) als die wahre Bergsteigung, wo $\operatorname{Rot}(h\mathfrak{V}) = h\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} < 0\,(> 0)$ ist, im Einklang mit unserer Quellen-Senken-Vorstellung, wonach der abgeänderte Berg $\tilde{\zeta}$ die verringerte (vermehrte) Aufwärtsgeschwindigkeit in Bodennähe veranlassen muß, welche durch das zusätzliche w_g hereinkommt. Ersetzt man in obiger

Gleichung u und v durch die berechneten Werte (8.6), wobei für unsere Theorie der 1. Ordnung hier u im Nenner durch 1 zu ersetzen ist, so ergibt sich als Bestätigung natürlich wieder, daß $\tilde{\zeta} \equiv \zeta_i$ sein muß.

Der sich im reibungslosen Grenzfall ergebende Ausdruck für v stimmt, wie es sein muß, mit dem von L. Prandtl [5] angegebenen Ergebnis überein, welches dort einfach auf Grund des Helmholtzschen Wirbelsatzes erschlossen wurde. (Zum reibungslosen Fall, dessen Theorie, selbständig durchgeführt, natürlich wesentlich einfacher wird, als sie in der obigen Behandlung als Grenzfall in Erscheinung tritt, sei der Leser auch auf den Schluß unseres § 15 verwiesen.)

Für die numerische Rechnung ist die Gestalt der Gln. (8.6) bis (8.9) mit den darin auftretenden Integralen über ζ_i weniger geeignet als eine solche, in der durch Verwendung von (8.5) diese Integrale beseitigt sind. So erhält man etwa durch Umformung

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 + \frac{\overline{H}}{h}(\zeta_i - \zeta) \\ &= v_0 - \frac{B}{R}\int_{x_0}^{x} e^{-\frac{(x-\lambda)}{G}}\,\zeta(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8.6\,\mathrm{a}),$$

$$\left.\begin{aligned} y - y_0 &= v_0(x - x_0) + G\left(\frac{\overline{H}}{h} - v_0\right)(\zeta - \zeta_i) - \frac{\overline{H}}{h}\int_{x_0}^{x}\zeta(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \\ &= v_0(x - x_0) + \left(\frac{\overline{H}}{h} - v_0\right)\int_{x_0}^{x} e^{-\frac{(x-\lambda)}{G}}\,\zeta(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda - \frac{\overline{H}}{h}\int_{x_0}^{x}\zeta(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (8.7\,\mathrm{a}).$$

Zwar ist in dieser Form der Grenzfall verschwindender Reibung nicht mehr unmittelbar ersichtlich, dafür aber tritt ein anderer Grenzfall, nämlich der Grenzfall sehr kleiner Geschwindigkeiten, einfach zutage: Sind die Geschwindigkeiten so klein, daß man die longitudinalen Trägheitsglieder gegenüber den Coriolisschen vernachlässigen kann, so ist in obigen Gleichungen $R = 0$ zu setzen (siehe § 5). Damit ist auch $G = 0$ und es ist

$$\lim_{G \to 0} \zeta_i = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8.11).$$

Wie es sein muß, erhält man für diesen Grenzfall die bereits in (7.7) und (7.8) angegebenen Gleichungen für Geschwindigkeitsverteilung und Stromlinienprojektion.

Für große Werte von G ist es angebracht, den Ausdruck (8.4) in eine Reihe nach fallenden Potenzen von G zu entwickeln. Indem man die Entwicklung der Exponentialfunktion im Integranden vornimmt, ergibt sich die für alle x und $G \neq 0$ absolut und gleichmäßig konvergente Reihe:

$$\left.\begin{aligned} \zeta_i(x; G) = \zeta(x) - \frac{1}{G}\int_{x_0}^{x}\zeta(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda + \frac{1}{G^2}\int_{x_0}^{x}(x - \lambda)\,\zeta(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda - \cdots\cdots \\ \cdots + \frac{(-1)^n}{(n-1)!\,G^n}\int_{x_0}^{x}(x - \lambda)^{n-1}\,\zeta(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda + \cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (8.12).$$

Von dieser Reihenentwicklung sind jeweils nur so viele Glieder zu berücksichtigen, als dies für eine Berechnung von ζ_i in erster Ordnung notwendig ist; Beiträgen, die dem Betrage nach klein im Vergleich zu $|\zeta|_{\mathrm{Max}}$ sind, kommt im Rahmen unserer Theorie der ersten Ordnung natürlich keine Bedeutung zu.

Die gleiche Entwicklung erhält man übrigens durch einen Iterationsprozeß in (8.5), ausgehend von der Näherung $\zeta_i = \zeta$ für $G = \infty$. Man erhält sie aber auch einfach durch wiederholte partielle Integration von (8.3). Beidemal ist nur noch zur Identifizierung der erhaltenen Reihen mit (8.12) zu berücksichtigen, daß

$$\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}\lambda_{n-1}\int_{x_0}^{\lambda_{n-1}}\mathrm{d}\lambda_{n-2}\ldots\ldots\int_{x_0}^{\lambda_1}\zeta(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x - \lambda)^{n-1}\,\zeta(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \quad \ldots \ldots \quad (8.13).$$

Einen Vergleich unserer Ergebnisse mit jenen der neueren Ekmanschen Theorie der Meeresströmungen ([2] 1932) können wir dort durchführen, wo Ekman sich ebenfalls auf die Berücksichtigung des topographischen Einflusses beschränkt und es ihm gelingt, für den zweidimensionalen Fall Aussagen über v herzuleiten. Er nimmt wie wir an, daß die Strömung

über ebenem Boden ankommend an einer Stelle — sagen wir wieder $x=x_0$ — einen Bodenanstieg oder -abfall erreicht und zwar — durch seine Darstellung bedingt — speziell senkrecht anströmt. Wenn nun vorausgesetzt wird, daß nur eine schwache Stromablenkung erfolgt, so daß eine Linearisierung sowohl in der Störung $u^*-u_0^*$ als auch in v^* (siehe unsere diesbezüglichen Bemerkungen oben, etwa Schluß von § 6) wegen $|u^*-u_0^*|\ll u_0^*$, $|v^*|\ll u_0^*$ vorgenommen werden kann, so gelangt Ekman zu einer bezüglich v linearen Differentialgleichung. Diese führt zu dem folgenden Ergebnis ([2], Abschnitt „Vollständigere Theorie"), das wir hier nunmehr in unseren Dimensionslosen schreiben:

$$v=-\frac{B}{R}e^{-Ax}\int_{x_0}^{x}\zeta(\lambda)\,e^{A\lambda}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Dies würde mit unserem unter allgemeineren Voraussetzungen gültigen Resultat (8.6a) mit $v_0=0$ dann exakt übereinstimmen, wenn man A mit G^{-1} identifizierte. Es gilt in Wirklichkeit nun folgende Umrechnungsformel:

$$A=\frac{1}{G}\cdot\frac{h}{D}\,\frac{2\pi}{\sin 2\alpha},$$

wo D die für die Bodenströmung gebildete „Ekmansche Reibungstiefe"

$$D=\pi\sqrt{\frac{\mu}{\varrho\,\omega'}}$$

bezeichnet, welche etwa der Dicke δ der Bodengrenzschicht entspricht, und wo ferner α den Ablenkungswinkel der Strömung am Boden gegenüber der Hauptströmung bezeichnet. Wie eine in Kapitel III durchgeführte Abschätzung lehren wird, ist $\frac{2\pi}{\sin 2\alpha}\,\frac{h}{\delta}$ jedenfalls im allgemeinen von der Größenordnung $0(1)$ bei Meeresströmungen, so daß wir uns insoweit in Übereinstimmung befinden mit diesem Ekmanschen Grenzfall. (Man kann hier einwenden, daß auch unser Ergebnis nur für kleine Störungen von v gilt, da wir bisher die Veränderlichkeit von h nicht berücksichtigt haben. Dazu verweisen wir jedoch auf § 11 unten.)

Die obigen Ergebnisse für Geschwindigkeitsverteilung und Stromlinienverlauf stellen wir nun noch in den dimensionsbehafteten Ausgangsgrößen zusammen (die wir vereinbarungsgemäß — siehe (7.1) — nun mit einem Stern versehen). Zuvor definieren wir noch, der oben angegebenen Deutung von ζ_i entsprechend, die Länge ζ_i^* (Höhe des „Ersatzberges") vermöge

$$\zeta_i^*=\overline{H}\,\zeta_i \quad \text{(8.14).}$$

Dann ist wegen $G=\frac{u_0^*\,\overline{H}}{2\,\omega'\,B\,h}$

$$\zeta_i^*(x^*)=\int_{x_0^*}^{x^*}\frac{\mathrm{d}\,\zeta^*(\lambda)}{\mathrm{d}\,\lambda}\;\exp\left\{-\frac{2\,\omega'\,h}{u_0^*\,\overline{H}}(x^*-\lambda)\right\}\mathrm{d}\,\lambda \quad \text{(8.3*);}$$

$$\left.\begin{aligned}
u^*&=u_0^*\left\{1+\frac{\zeta_i^*}{\overline{H}}\right\},\\
v^*&=v_0^*-\frac{2\,\omega'}{\overline{H}}\int_{x_0^*}^{x^*}\zeta_i^*(\lambda)\,\mathrm{d}\,\lambda,\\
w^*&=u_0^*\left(1-\frac{z^*}{\overline{H}}\right)\frac{\mathrm{d}\,\zeta_i^*}{\mathrm{d}\,x^*}
\end{aligned}\right\} \quad \text{(8.6*);}$$

$$y^*-y_0^*=\frac{v_0^*}{u_0^*}(x^*-x_0^*)-\frac{v_0^*}{u_0^*\,\overline{H}}\int_{x_0^*}^{x^*}\zeta_i^*(\lambda)\,\mathrm{d}\,\lambda-\frac{2\,\omega'}{u_0^*\,\overline{H}}\int_{x_0^*}^{x^*}\int_{x_0^*}^{\lambda_1}\zeta_i^*(\lambda)\,\mathrm{d}\,\lambda\,\mathrm{d}\lambda_1 \quad \text{(8.7*);}$$

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{v_0^*}{u_0^*}\left(1-\frac{\zeta_i^*}{\overline{H}}\right)-\frac{1}{R\,\overline{H}}\int_{x_0^*}^{x^*}\zeta_i^*(\lambda)\,\mathrm{d}\,\lambda \quad \text{(8.8*);}$$

$$\operatorname{tg}(\gamma-\gamma_0)=-\frac{u_0^*\,v_0^*\,\zeta_i^*+2\,\omega'\,u_0^*\int_{x_0^*}^{x^*}\zeta_i^*\,\mathrm{d}\,\lambda}{u_0^{*2}\,\overline{H}+v_0^{*2}(\overline{H}-\zeta_i^*)-2\,\omega'\,v_0^*\int_{x_0^*}^{x^*}\zeta_i^*\,\mathrm{d}\,\lambda} \quad \text{(8.9*);}$$

XUM

$$\left.\begin{aligned}\zeta_i^*(x^*) = \zeta^*(x^*) - \frac{2\,\omega' h}{u_0^*\,\overline{H}}\int_{x_0^*}^{x^*}\zeta^*(\lambda)\,d\lambda + \left(\frac{2\,\omega' h}{u_0^*\,\overline{H}}\right)^2\int_{x_0^*}^{x^*}(x^*-\lambda)\,\zeta^*(\lambda)\,d\lambda - \cdots\cdots \\ + \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\left(\frac{2\,\omega' h}{u_0^*\,\overline{H}}\right)^n\int_{x_0^*}^{x^*}(x^*-\lambda)^{n-1}\,\zeta^*(\lambda)\,d\lambda + \cdots\cdots\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (8.12^*).$$

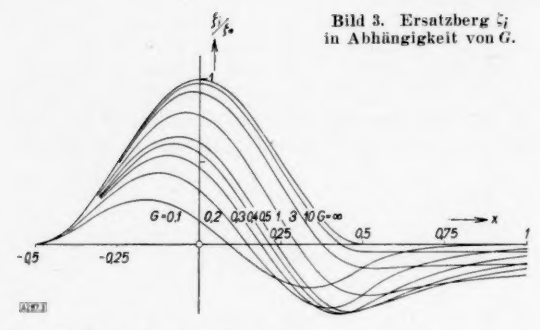


Bild 3. Ersatzberg ζ_i in Abhängigkeit von G.

§ 9. Ein Beispiel. Die Bodenerhebung sei beispielsweise durch das folgende Profil gegeben:

$$\zeta(x) = \begin{cases}\dfrac{\zeta_0}{2}\left\{1+\cos 2\pi x\right\} \\ \quad \text{für } |x| \leqq 1/2, \\ 0 \text{ für } |x| \geqq 1/2\end{cases} \quad . \; . \; (9.1),$$

wo ζ_0 eine Konstante (voraussetzungsgemäß $|\zeta_0| \ll 1$) bedeutet (siehe Bild 3, Kurve $G=\infty$).

Der Ersatzberg ζ_i berechnet sich zu

$$\zeta_i(x\,;\,G) = \left\{\begin{aligned}&0 \quad \text{für } x \leqq -1/2, \\ &\frac{2\,\zeta_0\,\pi^2\,G^2}{1+4\,\pi^2\,G^2}\left\{\cos 2\pi x - \frac{\sin 2\pi x}{2\pi G} + e^{-\frac{(x+0{,}5)}{G}}\right\} \quad \text{für } -1/2 \leqq x \leqq 1/2, \\ &-\frac{4\,\zeta_0\,\pi^2\,G^2}{1+4\,\pi^2\,G^2}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2\,G}\,e^{-x/G} \quad \text{für } x \geqq 1/2\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (9.2).$$

Er ist in Bild 2 für verschiedene Werte von G dargestellt und liefert uns eine sehr anschauliche Vorstellung vom Reibungseinfluß.

Setzt man (9.2) in unsere Formeln ein, so erhält man nach elementarer Rechnung Geschwindigkeitsverteilung und Stromlinienverlauf. Für die Grundrißprojektion der Stromlinien außerhalb der Reibungsschicht ergibt sich insbesondere:

$$\left.\begin{aligned}&y-y_0 = v_0\,(x-x_0) \quad \text{für } x \leqq -1/2\,; \\ &y-y_0 = v_0\,(x-x_0) + \frac{2\,\zeta_0\,\pi^2\,G^3}{1+4\,\pi^2\,G^2}\left\{\frac{\overline{H}}{h} - v_0\right\}\left\{\frac{\sin 2\pi x}{2\pi G} - \cos 2\pi x - e^{-\frac{x+0{,}5}{G}}\right\} \\ &\qquad + \frac{\zeta_0\,G}{2}\left\{\frac{\overline{H}}{h} - v_0\right\}\{1+\cos 2\pi x\} - \frac{\zeta_0}{2}\,\frac{\overline{H}}{h}\left\{x + \frac{1}{2} + \frac{\sin 2\pi x}{2\pi}\right\} \\ &\qquad\qquad \text{für } |x| \leqq 1/2\,; \\ &y-y_0 = v_0\,(x-x_0) + \left(\frac{\overline{H}}{h} - v_0\right)\frac{4\,\zeta_0\,\pi^2\,G^3}{1+4\,\pi^2\,G^2}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2\,G}\,e^{-x/G} - \frac{\zeta_0}{2}\,\frac{\overline{H}}{h} \\ &\qquad\qquad \text{für } x \geqq 1/2\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (9.3).$$

Im reibungslosen Grenzfall ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}&y-y_0 = v_0\,(x-x_0) \quad \text{für } x \leqq -1/2\,; \\ &y-y_0 = v_0\,(x-x_0) - v_0\,\frac{\zeta_0}{2}\left\{x + \frac{1}{2} + \frac{\sin 2\pi x}{2\pi}\right\} \\ &\qquad - \frac{B}{R}\,\frac{\zeta_0}{4}\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1+\cos 2\pi x}{2\pi^2}\right\} \quad \text{für } |x| \leqq 1/2\,; \\ &y-y_0 = v_0\,(x-x_0) - v_0\,\frac{\zeta_0}{2} - \frac{B}{R}\,\frac{\zeta_0}{2}\,x \quad \text{für } x \geqq 1/2\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (9.3\,a).$$

Wir haben diese Formeln für den Fall der senkrechten Berganströmung ($v_0 = v_0^*/u_0^* = 0$) ausgewertet. Ist $v_0 \neq 0$, so erhält man, solange $v_0 \ll B/R$ ist, die Stromlinien hinreichend genau, indem man den Stromlinienordinaten $y - y_0$ des Falles $v_0 = 0$ einfach $v_0\,(x-x_0)$ additiv überlagert.

Um zunächst den E i n f l u ß d e s V e r h ä l t n i s s e s B/R zu untersuchen, haben wir $\overline{H}/h$ als endlichen festen Wert angenommen und eine Stromlinie, genauer $(y-y_0)\left(\dfrac{\zeta_0}{2}\,\dfrac{\overline{H}}{h}\right)^{-1}$, eine

reine Funktion von x und G, in Bild 4 für verschiedene Werte von G aufgetragen. Für den Grenzfall $G \to 0$ ($R/B \to 0$, völliges Überwiegen der Corioliskräfte gegenüber den longitudinalen Trägheitskräften) erhält man, wie schon am Schluß des § 7 allgemein diskutiert wurde, eine Stromlinie mit Wendepunkt über dem höchsten Punkt des Berges. Dieser Wendepunkt wandert nun mit wachsenden Werten von G (d. h. von R/B) rasch stromabwärts, um bald ganz außerhalb des Interessenbereiches der Bergumgebung zu geraten. (Es muß beachtet werden, daß unser Bild nur die Abhängigkeit von der Bergbreite bei irgendeiner festen Anströmgeschwindigkeit (festem R) wiedergibt, da ja auch h streng genommen und jedenfalls in einem größeren Variabilitätsbereich der Geschwindigkeit als geschwindigkeitsabhängig angesehen werden muß.)

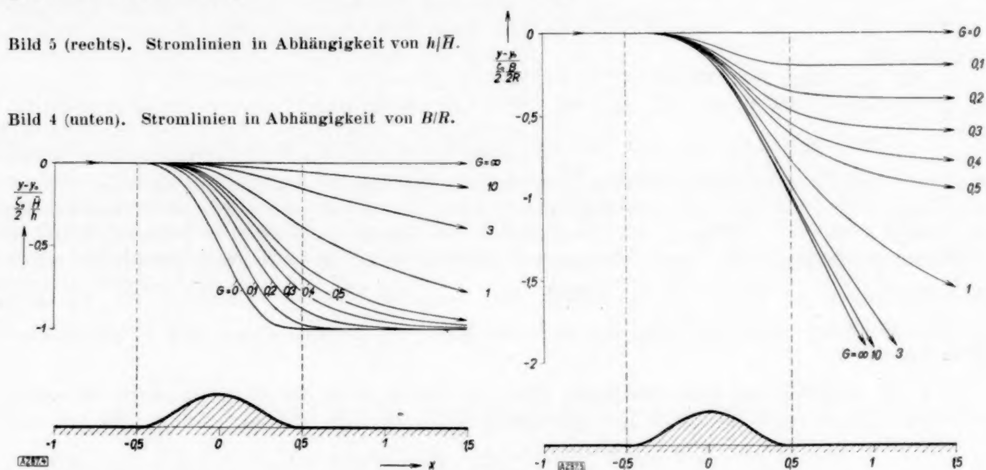


Bild 5 (rechts). Stromlinien in Abhängigkeit von $h/\overline{H}$.

Bild 4 (unten). Stromlinien in Abhängigkeit von B/R.

Der Einfluß des Verhältnisses $h/\overline{H}$, also, was uns hier in erster Linie interessiert, der Einfluß der Sekundärströmung in der bodennahen Reibungsschicht, wird in Bild 5 wiedergegeben. Hier ist R/B als fester endlicher Wert gedacht und demgemäß $(y - y_0)\left(\frac{\zeta_0}{2}\frac{B}{2R}\right)^{-1}$ wieder eine reine Funktion von x und G wegen $\frac{\overline{H}}{h} = G \cdot \frac{B}{R}$, für verschiedene Werte von G aufgetragen. Es ist also, wenn wir $\overline{H}$, B und R einzeln fest denken (also auch die Anströmgeschwindigkeit u_0^*) der Einfluß verschieden starker (laminarer oder turbulenter) Zähigkeit der bodennahen Schicht wiedergegeben. Man sieht, daß die für $G = \infty$ ($h/\overline{H} = 0$, reibungsloser Grenzfall) sich ergebende Kurve bereits durch die Kurven für endliche, nicht sehr große G gut approximiert wird. Für $G = 10$ liefert die Reibung schon keinen wesentlichen Beitrag mehr und bereits bei $G = 3$ ist die Abweichung von $G = \infty$ praktisch bedeutungslos. (Das entspricht auch den Verhältnissen des Bildes 3 gemäß unserer Deutung von ζ_i.) Für solche Werte von G wird man also bedenkenlos unter Vernachlässigung der Reibung rechnen dürfen.

Die Versetzung Δy eines Flüssigkeitsteilchens in y-Richtung an der Stelle x gegenüber der verlängerten Anströmlinie ist im Falle $v_0 = 0$ allgemein durch

$$\Delta y = -\frac{B}{R}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\lambda_1}\zeta_i(\lambda; G)\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\lambda_1 \qquad (9.4)$$

gegeben (und nach einer Bemerkung im Anschluß an (9.3) also auch für nichtverschwindende v_0, solange $|v_0| \ll B/R$, worauf wir uns der Einfachheit halber beschränken). Für hinreichend große G ist dafür genähert

$$\Delta y = -\frac{B}{R}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\lambda_1}\zeta(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\lambda_1 \qquad (9.5)$$

zu schreiben. Der gemachte Fehler läßt sich leicht unter Heranziehung von (8.5) abschätzen. Im behandelten Beispiel lehrt das Bild 3, daß man für $x - x_0 = 1$, also nach Zurücklegung des Weges B, schon für den noch verhältnismäßig kleinen Wert $G = 3$ einen prozentualen Fehler von weniger als 8% macht, wenn man (9.4) durch (9.5) ersetzt, für $G = 10$ einen solchen von 3%.

In unserem Beispiel ist nach der Näherungsformel (9.5) für hinreichend große G

$$\Delta y = \begin{cases} -\frac{B}{R}\zeta_0\left\{\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8\pi^2}(1+\cos 2\pi x)\right\} & \text{für } |x| \leqq 1/2, \\ -\frac{B}{R}\frac{\zeta_0}{2}x & \text{für } x \geqq 1/2 \end{cases} \quad . \quad . \quad . \quad (9.5\text{a}).$$

Die mit $v_0 = 0$ ankommende Strömung ist nach Überschreiten des Berges um einen gewissen Winkel γ abgelenkt worden, der durch

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{B}{R}\frac{\zeta_0}{2} = -\frac{B\,\omega'\,\zeta_0^*}{u_0^*\,\overline{H}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9.6)$$

gegeben ist.

Es sei etwa $B = 200$ km, $\zeta_0^* = 10^{-1}\,\overline{H}$, $\varphi = 30°$, $\omega = 7{,}292 \cdot 10^{-5}$ sec^{-1}. Ist dann $u_0^* = 10$ cm sec^{-1} (20 cm sec^{-1}), so ist $R = 1{,}37$ km (2,74 km), $\gamma = -82°12'$ $(-74°40')$, $\frac{\Delta y}{x} = -7{,}29$ $(-3{,}65)$ für $x \geqq 1/2$, so daß unmittelbar hinter dem Berge $(x = 1/2)$ also $\Delta y^* = -3{,}65\,B$ $(-1{,}82\,B)$ ist. Die zum Überschreiten des Berges benötigte Zeit t beträgt 22 Tage (11 Tage). Die gewählten Geschwindigkeiten entsprechen dabei jener Größenordnung, wie sie im Meere vorkommt. Wählen wir im Hinblick auf die Anwendungen bei atmosphärischen Strömungen etwa $u_0^* = 20$ m sec^{-1}, was einem frischen Wind in Bodennähe entspricht, so ist $R = 274$ km, $\gamma = -2°5'$, $\frac{\Delta y}{x} = -0{,}0365$ (für $x \geqq 1/2$), $\Delta y^* = -0{,}0182\,B$ für $x = 1/2$, $t = 2{,}64$ Stunden. (Dies gilt alles natürlich nur unter der Voraussetzung, daß G hinreichend groß ist.)

§ 10. Isobaren und freie Oberfläche. Für den Druck p^* in der Hauptströmung schreiben wir mit Rücksicht auf die dritte Eulergleichung (3.2) (statische Grundgleichung) und auf (3.6)

$$p^* = -\varrho g z^* + 2\omega'\{v_0^*(x^* - x_0^*) - u_0^*(y^* - y_0^*)\} + p_1^*(x^*, y^*) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10.1).$$

p_1^* ist dann der durch die Bodenerhebung hinzukommende Störungsanteil des Druckes.

Setzt man in den beiden ersten Eulerschen Gln. (3.2) die berechneten Geschwindigkeitskomponenten u, v gemäß (8.6), (8.6a) ein, so ergibt sich mit $p_1 = p_1^*/\varrho\,u_0^{*2}$ in dimensionsloser Schreibweise

$$-\frac{\partial p_1}{\partial x} = -\frac{1}{G}\zeta_i + \frac{d\zeta}{dx} - \frac{\overline{H}}{h}\frac{B}{R}(\zeta_i - \zeta),$$

$$-\frac{\partial p_1}{\partial y} = 0,$$

somit unter Verwendung von (8.5)

$$p_1(x) = -\zeta_i - \frac{B^2}{R^2}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\lambda_1}\zeta_i\,d\lambda\,d\lambda_1.$$

Es ist also

$$p - p_0 = \frac{g\,\overline{H}}{u_0^{*2}}(1 - z) + \frac{B}{R}\{v_0 x - y\} - \zeta_i - \frac{B^2}{R^2}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\lambda_1}\zeta_i\,d\lambda\,d\lambda_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10.2).$$

In einer bestimmten Höhe $z = \text{const}$ sind die Isobaren demnach durch

$$y - y_0 = v_0(x - x_0) - \frac{R}{B}\zeta_i - \frac{B}{R}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\lambda_1}\zeta_i\,d\lambda\,d\lambda_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10.3)$$

gegeben. Ein Vergleich mit den Stromlinien (siehe § 8)

$$y - y_0 = v_0(x - x_0) - v_0\int_{x_0}^{x}\zeta_i\,d\lambda - \frac{B}{R}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\lambda_1}\zeta_i\,d\lambda\,d\lambda_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8.8)$$

ergibt eine Abweichung $\Delta y = y_{\text{Isob.}} - y_{\text{Str.}}$ von

$$\Delta y = v_0\int_{x_0}^{x}\zeta_i\,d\lambda - \frac{R}{B}\zeta_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10.4).$$

Nehmen wir etwa den Fall $v_0 = 0$ der senkrechten Berganströmung, so beträgt die auf die Stromlinienabszisse bezogene prozentuale Abweichung

$$\frac{\Delta y}{(y-y_0)_{\text{Str.}}} = \frac{R^2}{B^2}\zeta_i \Bigg/ \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\lambda_1} \zeta_i \,d\lambda\, d\lambda_1 .$$

Für $R/B \ll 1$ (Meeresströmungen über ausgedehnte Berge, etwa $R/B = 10^{-2}$) ist diese vernachlässigbar klein (es sei denn, daß durch besondere Verhältnisse das Doppelintegral im Nenner an der betreffenden Stelle x klein vom Betrage gegenüber $|\zeta_i|$ wird; bei einem normalen Berg und großen Werten von G ($\zeta_i \approx \zeta$) kommt dies nicht vor). Für Werte von R, die mit B vergleichbar sind (atmosphärische Strömungen mit ihren wesentlich größeren Geschwindigkeiten), kann dagegen die Isobare stark von der Stromlinie abweichen. Für $G = \infty$ und $R/B = 1/2$ sind für das Beispiel des § 9 Stromlinien- und Isobarenfeld in Bild 6 eingezeichnet. Es ist in diesem Fall für $|x| \leqq 1/2$

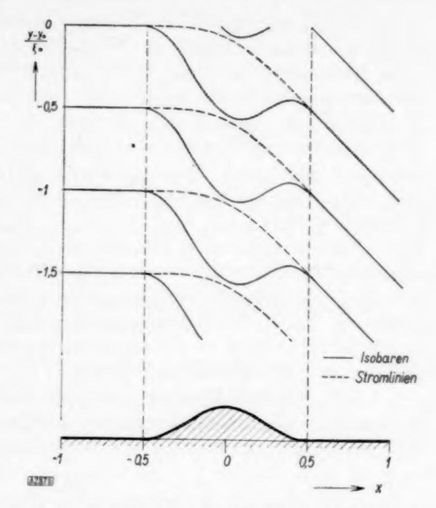


Bild 6. Stromlinien und Isobaren einer Strömung mit $u = 10\ \text{m sec}^{-1}$, $B/\overline{H} = 10^2$ und $G = \infty$.

$$(y-y_0)_{\text{Str.}} = \frac{\zeta_0}{2}\frac{B}{R}\left\{\frac{1}{4\pi^2}(\cos 2\pi x + 1) - \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right\},$$

$$(y-y_0)_{\text{Isob.}} = \frac{\zeta_0}{2}\frac{B}{R}\left\{\left(\frac{1}{4\pi^2} - \frac{R^2}{B^2}\right)(\cos 2\pi x + 1) - \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right\},$$

und in beiden Fällen $y - y_0 = -\dfrac{\zeta_0}{2}\dfrac{B}{R}x$ für $x \geqq 1/2$.

Starke Abweichungen können aber auch bei allen Geschwindigkeiten entstehen, wenn der Berg unter flachem Winkel zum Kamm angeströmt wird (Richtungszahl $v_0 = v_0^*/u_0^*$ der Anströmung von großem Betrag).

An der freien Oberfläche ist $p - p_0 = 0$. Verstehen wir unter H_0 die ungestörte Oberfläche der reinen Parallelströmung $\mathfrak{V}_0$ ($\zeta = 0$), so ist nach (10.2) mit $\zeta_i = 0$

$$H_0 = 1 + \frac{u_0^{*2}}{g\overline{H}}\frac{B}{R}(v_0 x - y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10.5).$$

Dies ist der zu $\mathfrak{V}_0$ gehörige ebene, senkrecht zur Strömungsrichtung geneigte Spiegel.

Bei Vorhandensein einer Bodenerhebung stellt sich die freie Oberfläche H gemäß

$$H - H_0 = -\frac{u_0^{*2}}{g\overline{H}}\left\{\zeta_i + \frac{B^2}{R^2}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\lambda_1}\zeta_i\, d\lambda\, d\lambda_1\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10.6)$$

ein. Für die praktische Rechnung wird wiederum folgende Umformung von Nutzen sein

$$H - H_0 = -\frac{u_0^{*2}}{g\overline{H}}\left\{\left(1 + \frac{\overline{H}^2}{h^2}\right)\zeta_i - \frac{\overline{H}^2}{h^2}\zeta + \frac{\overline{H}}{h}\frac{B}{R}\int_{x_0}^{x}\zeta\, d\lambda\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10.6\text{a}).$$

Die von uns entwickelte Theorie machte wesentlich Gebrauch von der Voraussetzung, daß $H - 1$ (d. h. $H^* - \overline{H}$) hinreichend klein sei, um für alle beabsichtigten Anwendungen bei ozeanischen und atmosphärischen Strömungen in dem Ausdruck (4.6) für die Vertikalgeschwindigkeit w^* die freie Oberfläche H^* durch $\overline{H}$ zu ersetzen. Nur unter dieser Voraussetzung bestehen also auch die eben abgeleiteten Ausdrücke für die Spiegeleinsenkung zu Recht. Wir werden auf diese Frage erst dann eingehen, wenn wir eine Untersuchung der im Meer und in der Atmosphäre auftretenden Größenordnung der charakteristischen Parameter durchgeführt haben (siehe § 14).

§ 11. Berücksichtigung der Veränderlichkeit von *h*. Wie bereits bei Einführung der Größe h in § 4 betont wurde, zeigt diese für den Reibungseinfluß maßgebende Länge einen merklichen Gang mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ der Hauptströmung. Sie hängt im übrigen natürlich auch von der Beschaffenheit der turbulenzerzeugenden Bodenrauhigkeiten ab und von der Dicke der Reibungsschicht. Hierüber erfolgen in Kapitel III nähere Angaben.

Wenn wir bisher in diesem Kapitel zur Vereinfachung der Rechnung die Länge h durch einen konstanten mittleren Wert in den Ausgangsgleichungen ersetzt dachten, so kann man vom Rechenergebnis nur eine erste Näherung für nicht zu starke Veränderungen von h im Strömungsbereich erwarten. Die folgende Rechnung wird zeigen, daß dies zutrifft, und zwar in dem Sinne sogar, daß für die Gültigkeit der bisherigen Näherungsrechnung wohl der Schwankung von h eine obere Schranke gesetzt ist, daß aber h innerhalb dieser Schranken durchaus schnellen Veränderungen unterworfen sein darf. Solche plötzlichen Änderungen von h über kurze Strecken kommen in der Natur etwa vor, wenn sich die Bodenbeschaffenheit plötzlich ändert.

Bei im einzelnen bekanntem Strömungsverlauf ist h eine bekannte Funktion der Ortskoordinaten, im vorliegenden zweidimensionalen Fall insbesondere $h = h(x)$. Wir wollen nun im folgenden h zunächst von vornherein als gegebene Funktion von x ansehen. Wir umgehen damit die Schwierigkeit, eine komplizierte Geschwindigkeitsabhängigkeit der Länge h auf Grund einer — bis heute allein möglichen — groben Abschätzung in unsere Ausgangsgleichungen einführen zu müssen.

Wir beschränken uns im folgenden zur Vereinfachung der Formeln auf den Fall der senkrechten Anströmung unserer Bodenerhebung: $v_0 = 0$. Unsere dimensionslosen Gln. (7.4) und (7.5) sind dann mit $h = h(x)$ zu ersetzen durch

$$G_0\, u \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left[\frac{h_0}{h}\{(1-\zeta)\,u-1\}\right] + u - 1 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11.1),$$

$$v = \frac{\overline{H}}{h}\{(1-\zeta)\,u-1\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11.2).$$

Dabei ist $h_0 = h(x_0)$ und G_0 ist die mit h_0 gebildete für den Reibungseinfluß charakteristische Dimensionslose G, also

$$G_0 = \frac{u_0^*\,\overline{H}}{2\,\omega'\,h_0\,B} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11.3).$$

Die Gl. (7.6) für w bleibt natürlich formal ungeändert.

Die Behandlung der Differentialgleichung (11.1) kann allgemein mit denselben Mitteln durchgeführt werden, wie sie bisher angewandt wurden, also durch den Linearisierungsansatz (8.1): $u = 1 + \zeta_i$, und zwar wiederum ohne neue Annahme allein als Konsequenz der unserer Theorie bereits zugrunde liegenden Voraussetzungen des Kapitels I. An Stelle von Gl. (8.2) tritt dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(G\,\zeta_i) + \zeta_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(G\,\zeta) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11.4)$$

mit $G = \dfrac{R}{B}\dfrac{\overline{H}}{h(x)} = G(x)$. Durch Integration dieser Gleichung von x_0 bis zu einer variablen Stelle x des Strömungsbereichs erhält man an Stelle von (8.5) die Beziehung

$$\zeta(x) = \zeta_i(x) + \frac{1}{G(x)}\int_{x_0}^{x} \zeta_i(\lambda)\,\mathrm{d}\,\lambda \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11.5).$$

Benutzt man diese Beziehung zur Berechnung von v aus (11.2), so erhält man insgesamt wieder formal dieselben Relationen (8.6) für die Geschwindigkeitsverteilung (das würde auch noch gelten, wenn $v_0 \neq 0$), nämlich

$$\left.\begin{aligned} u(x) &= 1 + \zeta_i(x) \\ v(x) &= -\frac{B}{R}\int_{x_0}^{x} \zeta_i(\lambda)\,\mathrm{d}\,\lambda \\ w(x, z) &= \frac{\overline{H}}{B}(1-z)\frac{\mathrm{d}\,\zeta_i(x)}{\mathrm{d}\,x} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11.6).$$

Hieraus folgt, daß auch allgemein der dimensionslosen Störungsgröße ζ_i die ihr früher gegebene Deutung als Kontur des „Ersatzberges" zukommt. Insoweit hat sich nichts geändert. Damit bleiben auch die Ausdrücke (8.7), (8.8) und (8.9) für Stromlinienverlauf und Stromablenkungswinkel bestehen, nur daß eben das frühere ζ_i durch einen verbesserten, die Veränderlichkeit von h berücksichtigenden Ausdruck zu ersetzen ist. Dieser an Stelle von (8.4) tretende Ausdruck, das Integral der Differentialgleichung (11.4) lautet:

$$\zeta_i(x) = \zeta(x) - \frac{1}{G(x)} \int_{x_0}^{x} \zeta(\lambda) e^{-\int_{\lambda}^{x} \frac{d\lambda_1}{G(\lambda_1)}} d\lambda \quad \text{(11.7)}.$$

(Für die praktisch vorkommenden großen Werte von G kann man nach den schon früher angegebenen Methoden geeignete Reihenentwicklungen herstellen.)

Aus diesem Ausdruck (11.7) erkennt man unmittelbar, daß der Ersatz von $h(x)$ (und damit von $G(x)$) durch einen geeigneten Mittelwert als erste Näherung für die Berechnung der Stromablenkung berechtigt ist, wenn $h(x)$ von geringer Schwankung ist. Dabei spielt es keine Rolle, ob in diesen Grenzen plötzliche Schwankungen, d. h. große Werte von $\frac{dh}{dx}$, vorkommen, da nur h selbst und Integrationen über diesen Ausdruck maßgebend sind.

Starke Veränderungen von h können in der Natur auftreten, etwa wenn sich $\mathfrak{B}$ im Strömungsbereich stark ändert (nach (11.6) also für große $\frac{B}{R}$, also z. B. bei Meeresströmungen mit ihren kleinen Geschwindigkeiten) oder bei starker Änderung der Bodenrauhigkeit (etwa wenn Luft vom Meere herein über stark zerklüftete Gebirgslandschaft hinwegströmt, um ein krasses Beispiel zu nennen). Wie man sich hier helfen kann, wenn es notwendig werden sollte, sei kurz skizziert. Man zerlege den Bereich B in eine genügende Anzahl von Teilintervallen $B_1, B_2, \ldots\ldots, B_n$ ($B_\varkappa : x_{\varkappa-1} \leq x \leq x_\varkappa, \varkappa = 1, 2, \ldots, n$), in denen man einzeln mit der geforderten Genauigkeit mit konstantem $G = G_\varkappa$ rechnen darf. Diese Rechnungen werden Schritt für Schritt in Strömungsrichtung durchgeführt, wobei für jedes $G_\varkappa$ zunächst ein im voraus zu schätzender Mittelwert in $B_\varkappa$ eingesetzt wird. (Dazu können die Ausführungen des Kapitels III dienen.) Wenn sich dieser Wert auf Grund des berechneten $\mathfrak{B}$ als zu schlecht erweist, kann die Rechnung mit einem nun leicht besser zu schätzenden $G_\varkappa$ wiederholt werden. Ist die Strömung in $B_\varkappa$ berechnet, so kennt man die Geschwindigkeiten in $x = x_\varkappa$ und damit die Anfangsbedingungen für das Intervall $B_{\varkappa+1}$. (Es sei bemerkt, daß unsere in diesem Kapitel hergeleiteten Formeln nicht unmittelbar hier zu verwenden sind, da wir an der Eintrittsstelle des Strömungsbereichs spezielle Anfangsbedingungen angesetzt haben. Es wären also zunächst die Ausdrücke bei Anfangsbedingungen allgemeiner Art ein für allemal herzustellen, was keiner neuen Schwierigkeit begegnet.)

Wie schon angekündigt, wird eine Abschätzung lehren, daß sich die Werte von G bei atmosphärischen und ozeanischen Strömungen im allgemeinen in Grenzen bewegen, für die nach unserer Theorie der Reibungseinfluß keine bedeutende Wirkung ausübt. Insofern werden die eben angestellten Betrachtungen hier wohl kaum eine praktische Rolle spielen. Wesentlich bleibt allein, daß mit unserer Theorie der Reibungseinfluß allgemein erfaßt werden konnte.

III. Anwendung auf Strömungen im Meer und in der Atmosphäre.

In diesem Kapitel wird zunächst die Frage der Größenordnung der auftretenden Dimensionslosen, insbesondere der für den Einfluß der Sekundärströmung maßgebenden Größe G bei den im Meer und in der Atmosphäre vorkommenden Strömungsverhältnissen erörtert. Ferner ist zu prüfen, ob die Vernachlässigung der Spiegeleinsenkung in der Gl. (4.6) bei diesen Verhältnissen berechtigt war.

§ 12. Approximation der Geschwindigkeitsverteilung in der bodennahen Reibungsschicht. Eine strenge Untersuchung des Einflusses der Sekundärströmung in der bodennahen turbulenten Reibungsschicht wäre nur möglich, wenn die Gesetzmäßigkeiten beschleunigter turbulenter Strömungen genau erforscht wären. Bei dem heutigen Stand der Forschung bleibt uns nur der Weg einer rohen Abschätzung übrig.

Die Grundlage dieser Abschätzung geht auf Ausführungen von L. Prandtl zurück. Ich entnehme sie der demnächst erscheinenden Neuauflage des Prandtlschen Lehrbuches „Abriß der Strömungslehre". Herr Prof. Prandtl hat mir hierzu das Manuskript des betreffenden Abschnitts: „Reibungswind und ähnliches" zur Verfügung gestellt.

Wir betrachten mit Prandtl folgenden verhältnismäßig einfachen Fall. Außerhalb der turbulenten Reibungsschicht über einem rauhen, im Mittel ebenen, rotierenden Boden herrsche eine Parallelströmung mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{B}^* = \{U^*, 0\}$. Die durch $\mathfrak{B}^*$ erzeugten Corioliskräfte müssen dann mit einem entsprechenden Druckgefälle im Gleichgewicht stehen. Der Druck ist nach (3.6) durch $p^* = p_0^* - 2\varrho\omega' U^* y^*$ gegeben.

Wir approximieren die mittlere Geschwindigkeitsverteilung in der turbulenten Grenzschicht dieser Strömung durch folgenden Ansatz. Zunächst wird u^* durch das gewohnte Potenzprofil

$$u^* = U^* \left(\frac{z^*}{\delta}\right)^{1/n} \quad (z^* \leq \delta) \quad \text{(12.1)}$$

genähert. Die Länge δ (ein Maß für die Grenzschichtdicke) und der Exponent $1/n$ sind noch geeignet zu wählen. Für die Geschwindigkeit v^* der durch die Erddrehung hervorgerufenen Sekundärströmung senkrecht zu $\mathfrak{B}^*$ wird angesetzt:

$$v^* = u^* \operatorname{tg} \alpha \left(1 - \frac{z^*}{\delta}\right) \qquad (z^* \leq \delta) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (12.2).$$

Damit ist $v^* = 0$ für $z^* = \delta$ und $\lim\limits_{z^* \to 0} \frac{v^*}{u^*} = \operatorname{tg} \alpha$. Es ist also α der Winkel, den die Strömung unmittelbar am Boden mit der Hauptströmung bildet.

Da nun die Komponenten τ_x, τ_y der Schubspannung am Boden $z^* = 0$ sich aus den Corioliskräften wegen $\frac{\partial \tau_x}{\partial z^*} = -2\omega' \varrho v^*$, $\frac{\partial \tau_y}{\partial z^*} = \frac{d p^*}{d y^*} + 2\omega' \varrho u^*$ zu

$$\left.\begin{aligned} \tau_x &= 2\omega' \varrho \int_0^\delta v^* \, d z^* = \frac{2 n^2 \operatorname{tg} \alpha}{(n+1)(2n+1)} \varrho \omega' U^* \delta \\ \tau_y &= 2\omega' \varrho \int_0^\delta (U^* - u^*) \, d z^* = \frac{2}{n+1} \varrho \omega' U^* \delta \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (12.3)$$

berechnen, wird $\operatorname{tg} \alpha$ wegen $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\tau_y}{\tau_x}$ durch n vermöge

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{n} \sqrt{2n+1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (12.4)$$

ausgedrückt.

Es gilt nun, δ und n geeignet zu wählen. Dazu bedient sich Prandtl des bekannten logarithmischen Gesetzes für die Geschwindigkeitsverteilung einer turbulenten Grenzschichtströmung über ruhenden rauhen Flächen:

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_x}{\varrho}} \left\{5{,}75 \log \frac{z^*}{k} + C\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (12.5).$$

Darin ist k die Höhe der Bodenrauhigkeiten, während die Zahl C von der jeweiligen geometrischen Form und von der Verteilung der Rauhigkeiten abhängt. Wir verweisen auf die Messungen von H. Schlichting [7] an verschieden gearteten Rauhigkeiten. Dort wird statt k in (12.5) eine reduzierte Rauhigkeitslänge eingesetzt, die äquivalente Sandrauhigkeitshöhe k_s, mit dem Erfolg natürlich, daß die Zahl, die dann an Stelle von C zu treten hat, nämlich $C + 5{,}75 \log k_s/k$, eine universelle Konstante ($= 8{,}48$) ist. Ferner sei auf die über verschieden bebautem Gelände ausgeführten Messungen von W. Paeschke [3] verwiesen. (Auch hier wird statt k eine anders definierte Länge, eine „wirksame Rauhigkeitshöhe" in (12.5) eingesetzt. Sie stimmte bei den dort betrachteten Rauhigkeiten im allgemeinen mit der wirklichen Rauhigkeitshöhe überein und es ergab sich an Stelle von C die Zahl 4,98. Diese „wirksame" Rauhigkeitshöhe kann aber natürlich in ausgearteten Fällen stark von der wirklichen Höhe der Rauhigkeiten abweichen. So hat ein Weizenfeld (Höhe 130 cm) nach Paeschke dieselbe wirksame Rauhigkeitshöhe wie hohes Grasland (30 cm), was man ja auch rein anschaulich zu erwarten hat.)

Bei den hier interessierenden nicht ausgearteten Rauhigkeiten wird C in (12.5) zwischen 5 und 8,5 variieren. Für unsere Abschätzung müssen wir C festlegen und wählen aus Bequemlichkeitsgründen später $C = 5{,}75$. (Solange k hinreichend klein gegenüber δ ist, spielt ein kleiner Fehler in der Wahl von C keine Rolle. Für eine genauere Betrachtung ist bei dieser festen Wahl von C unter k nicht die wirkliche, sondern eben eine auf diesen C-Wert reduzierte Höhe zu verstehen, die sich aus $\log k/k_w = 1 - C_w/5{,}75$ berechnet, wo nun k_w die wirkliche Rauhigkeitshöhe und C_w die aus Messungen zu ermittelnde zugehörige Zahl des Gesetzes (12.5) bezeichnen.)

Der Bereich der hier zu berücksichtigenden Rauhigkeitshöhen erstreckt sich von einigen Zentimetern (Schneefläche etwa) bis zu Größenordnungen von 100 m (zerklüftetes Gebirge). Die geeignete Wahl von k für Meeresströmungen dürfte nicht immer leicht fallen. Durch Dichteschichtungen etwa können überdies die jeweiligen Rauhigkeiten stark abgemildert in Erscheinung treten.

Das Gesetz (12.5) soll nun in zweifacher Hinsicht verwertet werden. Einmal soll daraus das Maß δ der Grenzschichtdicke ermittelt werden. Setzt man in (12.5) $z^* = \delta$ und also $u^* = U^*$:

$$\tau_x = \varrho U^{*2} \left\{5{,}75 \log \frac{\delta}{k} + C\right\}^{-2} \quad \ldots \ldots \ldots (12.6),$$

und vergleicht man mit (12.3) unter Berücksichtigung von (12.4), so erhält man als Bestimmungsgleichung für δ:

$$\delta \cdot \sin\varphi = \frac{(n+1)\sqrt{2n+1}}{n}\,\frac{U^*}{2\,\omega}\left\{5{,}75\log\frac{\delta}{k}+C\right\}^{-2} \quad \text{(12.7)}.$$

Es ist nun noch n geeignet zu wählen, d. h. so, daß (12.1) im Mittel gut mit (12.5) zur Deckung kommt. Eine geeignete Formulierung dieser Forderung besteht darin, daß die Verdrängungsdicke $\frac{1}{U^*}\int\limits_0^\delta (U^*-u^*)\,\mathrm{d}z^*$ — d. i. diejenige Höhe, um welche die äußere Parallelströmung durch Ausbildung der Grenzschicht vom Boden abgehoben wird — in beiden Fällen den gleichen Wert haben soll. Dies ergibt

$$(n+1)\log e = \log\frac{\delta}{k} + C/5{,}75 \quad \text{(12.8)},$$

also n als Funktion von $\frac{\delta}{k}$. Damit ist auch $\operatorname{tg}\alpha$ als Funktion von $\frac{\delta}{k}$ nach (12.4) bekannt.

§ 13. Größenordnung der charakteristischen Dimensionslosen im Bereich der ozeanischen und der atmosphärischen Strömungen. Die im vorangehenden Paragraphen nach L. Prandtl durchgeführte Abschätzung gilt zunächst nur für den vorausgesetzten einfachen Fall einer Parallelströmung außerhalb der turbulenten Reibungsschicht über einen im Mittel ebenen rauhen Boden. Die Anwendung auf die in unserer Theorie behandelten Strömungen mit nicht geradlinigen Isobaren ist aber zulässig, soweit wir uns dessen bewußt bleiben, daß die herangezogene Abschätzung nur größenordnungsmäßig in Anspruch zu nehmen ist.

Die gemäß (4.3) in unsere Theorie eingeführte Länge h berechnet sich wegen

$$|\mathfrak{M}| = \varrho\int\limits_0^\delta v^*\,\mathrm{d}z^* = \varrho\,U^*\,\delta\,\frac{\sqrt{2n+1}}{(n+1)(n+2)}$$

zu

$$h = \delta\,\frac{\sqrt{2n+1}}{(n+1)(n+2)} \quad \text{(13.1)}.$$

Zur übersichtlichen Vergegenwärtigung der durch unsere Formeln größenordnungsmäßig gegebenen Zusammenhänge ist das Nomogramm Bild 7 entworfen worden. Es wurde dabei aus Bequemlichkeitsgründen $C = 5{,}75$ gewählt, da es im folgenden auf den Wert von C nicht wesentlich ankommt. Ferner wurde im Hinblick auf unsere Anwendungen $\omega = 7{,}29\cdot 10^{-5}\ \mathrm{sec}^{-1}$ gesetzt.

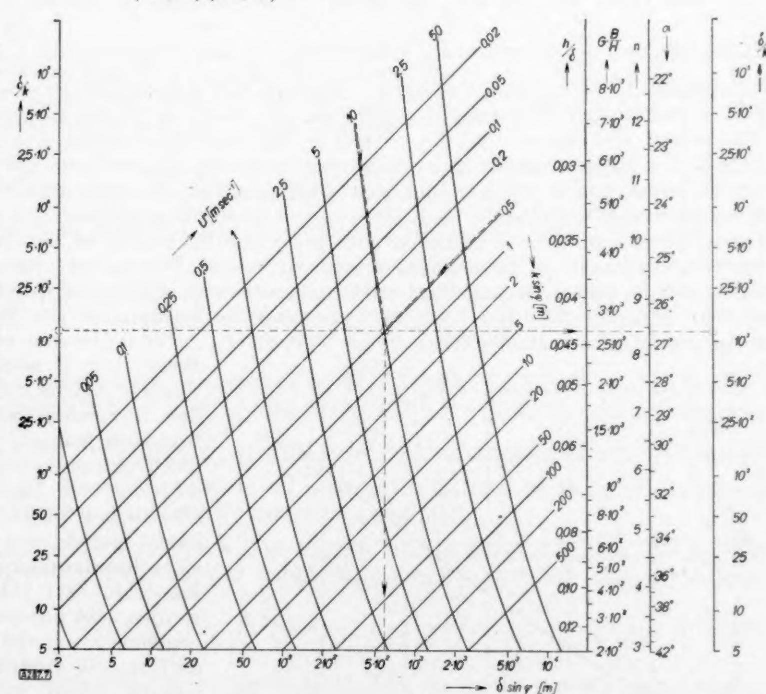


Bild 7. Nomogramm zur groben Abschätzung von $U^*, k, \delta, G, h, n, \alpha$.

Zunächst ist über δ/k (Skala links und rechts außen) zu verschiedenen festen Werten von U^* im Bereich der uns interessierenden Geschwindigkeiten der zugehörige Verlauf von $\delta\sin\varphi$ nach (12.7) unter Benutzung von (12.8) als Kurvenschar $U^* = \mathrm{const}$ aufgetragen. Ferner geben die im doppeltlogarithmischen Netz des Bildes schräg nach rechts ansteigenden Geraden die Linien konstanter Rauhigkeitshöhen, genauer $k\sin\varphi$

$=$ const, wieder. Man kann damit in einfacher Weise zu vorgegebenen Werten der Rauhigkeitshöhe k, der Geschwindigkeit U^* und der geographischen Breite φ den zugehörigen Wert von δ entnehmen.

Auf rechtsstehenden Skalen sind die Werte von h/δ nach (13.1), n nach (12.8) und α nach (12.4) zu den in gleicher Höhe liegenden Werten von δ/k angegeben.

Uns interessiert hier in erster Linie die in Frage kommende Größenordnung der Dimensionslosen $G = \frac{U^* \overline{H}}{2\,\omega' B}$. Es ist daher noch in einer weiteren rechtsstehenden Skala die Größe $G \cdot \frac{B}{\overline{H}} = \frac{U^*}{2\,h\,\omega'}$, nach (12.7) in Verbindung mit (13.1) eine reine Funktion von δ/k:

$$G\frac{B}{\overline{H}} = \frac{n\,(n+2)}{2\,n+1}\left\{5{,}75 \log \frac{\delta}{k} + C\right\}^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13.2)$$

aufgetragen.

Als Nomogramm-Schlüssel ist gestrichelt folgendes Beispiel einer Ablesung eingetragen: Zu $U^* = 10$ m/sec und $k \sin\varphi = 0{,}5$ m (etwa: $k = 1$ m bei $\varphi = 30^0$) liest man ab: $\delta \sin\varphi = 5{,}9 \cdot 10^2$ m; $n = 8{,}4$; $\alpha = 26{,}7^0$; $h = 0{,}043\,\delta$; $G = 2{,}7 \cdot 10^3 \frac{\overline{H}}{B}$ (also etwa für $B = 100\,\overline{H}$ wird $G = 27$).

Was die Verhältnisse bei Meeresströmungen anbelangt, so ist $U^* = 0{,}5$ m/sec bereits als große Geschwindigkeit zu bezeichnen. In der Atmosphäre entspricht 20 m/sec der Windstärke 10 nach der Beaufortskala. In Bodennähe würde dem ein frischer Wind entsprechen. Unser Nomogramm umfaßt bis $U^* = 50$ m/sec alle interessierenden Windstärken.

Als Rauhigkeitshöhe k am Boden der Grenzschicht kommt ihrem Begriffe nach nur eine Größe in Frage, die klein ist im Vergleich zur Dicke δ der turbulenten Grenzschicht. Diese Rauhigkeiten erzeugen die Turbulenz. (Bodenerhebungen, die groß gegenüber diesen Rauhigkeitshöhen sind, geben gemäß den Formeln unserer Theorie die Stromablenkung.). Unser Nomogramm ist also nach unten begrenzt, und zwar haben wir bei dem bereits zu kleinen Wert $\delta/k = 5$ abgebrochen.

Man kann, wie aus dem Nomogramm ersichtlich ist, annehmen, daß $G > 3 \cdot 10^2 \frac{\overline{H}}{B}$ ist, im allgemeinen sogar wesentlich größer. Nimmt man beispielsweise $\frac{\overline{H}}{B} = 10^{-2}$ an (bei einer Meerestiefe $\overline{H} = 5$ km also $B = 500$ km, das sind fast 5 Äquatorgrade; bei der Höhe $\overline{H} = 8$ km der gleichförmigen Atmospäre $B = 800$ km), so nimmt G Werte zwischen 3 und 80 an, im allgemeinen also Werte, für die nach § 9 der Sekundärströmung keine Bedeutung für den Verlauf der Hauptströmung mehr beigemessen werden kann. Gewiß ist die Angabe über die untere Grenze von G wie alle hier gemachten Angaben nur größenordnungsmäßig richtig, wir müssen also die Möglichkeit des Eintretens von Grenzfällen zulassen, für welche G hinreichend klein ausfällt, um einen merklichen oder gar wesentlichen Einfluß der Reibung in der bodennahen Grenzschicht in Erscheinung treten zu lassen. Nur jedoch, wenn man B wesentlich größer als in dem eben angeführten Beispiel annimmt, kann $G \ll 1$ werden. Bei dem sehr großen Wert $B = 2000$ km kann nach unserem Nomogramm G für Meeresströmungen bei entsprechend großen Rauhigkeiten einen Wert unter 1, etwa 0,75 annehmen. Für derart große Werte von B aber wollen wir unsere Theorie, welche die Erdoberfläche durch ihre Tangentialebene ersetzt, nicht in Anspruch nehmen. Man bedenke dabei, daß die Stromlinienablenkung beim Überschreiten der Bodenerhebung ein beträchtliches Vielfaches von B erreichen kann (gerade bei Meeresströmungen, siehe das Beispiel am Schluß des § 9). Immerhin darf jedoch nicht vergessen werden, daß unsere Abschätzung streng genommen nur dort angewandt werden darf, wo die $\mathfrak{V}$-Strömung weiträumig genug ist, um an jeder Stelle durch eine geradlinig-gleichförmige Strömung für obige Abschätzung ersetzt werden zu können.

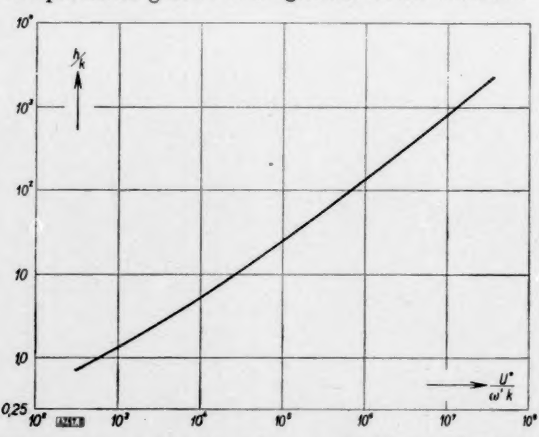


Bild 8. Länge h in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit U^*.

Die Länge h zeigt nach der Abschätzungsformel (13.1) eine recht merk-

liche Abhängigkeit von der Geschwindigkeit. Für den ganzen im Nomogramm Bild 7 umfaßten Bereich ist diese in dimensionsloser Auftragung in Bild 8 wiedergegeben. Nähert man die dargestellte Kurve in der doppeltlogarithmischen Auftragung durch ihre Tangente im Kurvenpunkt h_0/k, $U_0^*/\omega' k$, so ergibt sich ein gebietsweise gültiges Näherungsgesetz der Form

$$h/h_0 = (U^*/U_0^*)^\lambda \quad \text{(13.3)},$$

wo im dargestellten Bereich $0{,}45 < \lambda < 0{,}85$.

In § 11 wurde ausgeführt, wie die Veränderlichkeit von h in unserer Theorie berücksichtigt werden kann. In entsprechender Weise kann man eine Korrektur für die Veränderlichkeit der Verdrängungsdicke der Reibungsschicht anbringen — die Kontur ζ in unserer Theorie ist der um die Verdrängungsdicke gehobene Boden, siehe § 4 —, indem man einen ersten gröberen Rechnungsgang mit konstanter Verdrängungsdicke durchführt, aus dem erhaltenen Geschwindigkeitsfeld und unserer Abschätzungsformel die Veränderungen der Verdrängungsdicke abschätzt und die Rechnung mit einem so verbesserten ζ nochmals durchführt. Da die Verdrängungsdicke durch $\dfrac{\delta}{n+1}$ nach (12.1) gegeben ist, wird sie bei Meeresströmungen, wo eine solche Korrektur eventuell erwünscht sein könnte, jedoch im allgemeinen klein gegenüber $|\zeta|_{\text{Max}}$ sein.

Übrigens sei noch erwähnt, daß auch plötzliche Änderungen unseres Parameters G durch sprunghaftes Ändern der Rauhigkeitshöhe k möglich sind, etwa wenn ein Wind vom Meer hereinströmend die Küste erreicht, oder vom Boden mit niedrigem Bewuchs her über einen Wald, eine Großstadt oder dgl. weht.

§ 14. Größenordnung der Spiegeleinsenkung. Nach § 10 ist die durch die Bodenerhebung bewirkte Spiegeleinsenkung gegeben durch

$$H - H_0 = -\frac{u_0^{*2}}{g\,\overline{H}}\left\{\zeta_i + \frac{B^2}{R^2}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\lambda_1}\zeta_i\,d\lambda\,d\lambda_1\right\} \quad \text{(10.6)},$$

und es ist eine noch zu bestätigende Voraussetzung unserer Theorie, daß diese bei ozeanischen und atmosphärischen Strömungen dem Betrage nach klein bleibt gegenüber $|\zeta|$. Wie wir wissen, ist $\zeta_i = O(\zeta)$ und wegen § 13 im allgemeinen sogar $\zeta_i \approx \zeta$.

Zunächst zum Falle der Meeresströmungen. Der Faktor $u_0^{*2}/g\,\overline{H}$ ist, wenn wir $\overline{H} = 3$ km annehmen und die für ozeanische Strömungen sehr große Geschwindigkeit $u_0^* = 60$ cm/sec zugrunde legen, mit $g = 981$ cm/sec^2 von der Größenordnung 10^{-5}. Der Faktor $\dfrac{u_0^{*2} B^2}{g\,\overline{H} R^2} = \dfrac{4\,\omega'^2 B^2}{g\,\overline{H}}$ ist bei $\varphi = 30^\circ$ und dem für unsere Theorie großen Wert $B = 500$ km etwa $5 \cdot 10^{-2}$ (bei $B = 300$ km etwa $1{,}7 \cdot 10^{-2}$), und das Doppelintegral über ζ_i sorgt mit dafür, daß auch der zweite Summand in (10.6) von der Größenordnung $10^{-2}\,O(\zeta)$ wird. Insgesamt ist also $|H - H_0| \ll O(\zeta)$.

Im Falle der atmosphärischen Strömungen ist $\overline{H} = 8$ km anzusetzen und $u_0^* = 20$ m/sec entspricht einem frischen Wind am Boden. Hierfür ist $u_0^{*2}/g\,\overline{H} \approx 5 \cdot 10^{-3}$. Ferner ist wieder mit $B = 500$ km und $\varphi = 30^\circ$ der Faktor $\dfrac{4\,\omega'^2 B^2}{g\,\overline{H}} \approx 1{,}5 \cdot 10^{-2}$. Also auch hier ist $|H - H_0| \ll O(\zeta)$. Jedoch ist überhaupt die Fragestellung hier von geringer Bedeutung, da ja unser Modell der Atmosphäre gerade hierin der Wirklichkeit gar nicht entspricht.

Neben der Spiegeleinsenkung durch den Einfluß der Bodenerhebung ist die Spiegelneigung der ungestörten Oberfläche bei der Parallelströmung $\mathfrak{V}_0^* = \{u_0^*, v_0^*\}$, nach (10.5) durch

$$H_0 - 1 = \frac{2\,\omega'}{g\,\overline{H}}(v_0^* x^* - u_0^* y^*) \quad \text{(14.1)}$$

gegeben, abzuschätzen. Denn auch diese muß klein bleiben, da wir H durch 1 ersetzt haben. Mit $x^*, y^* = O(500\text{ km})$ (also ein Strömungsbereich von einer waagerechten Erstreckung bis zu etwa 1000 km, da x^*, y^* vom Zentrum O des Bereiches aus gemessen werden) ist im Falle der Meeresströmungen — nehmen wir $u_0^*, v_0^* = O(30\text{ cm/sec})$, $\overline{H} = 5$ km, $\varphi = 30^\circ$ — an den Begrenzungen des Bereichs $|H_0 - 1| = O(10^{-4})$, also gewiß im Strömungsbereich als klein gegenüber $|\zeta|_{\text{Max}}$ (das etwa als $O(10^{-1})$ angesetzt werden kann, da wir quadratische Glieder

in ζ gegen 1 vernachlässigt haben). Im Falle der atmosphärischen Strömungen wird $|H_0 - 1|$ mit $u_0^*, v_0^* = O\,(20\ \mathrm{m/sec})$, $\bar{H} = 8\ \mathrm{km}$, $\varphi = 30^\circ$ etwa $O\,(10^{-2})$. Allein für atmosphärische Strömungen ist die ganze Fragestellung, wie soeben schon bemerkt, sowieso von geringer Bedeutung: Wenn wir schon die gleichförmige Atmosphäre als Ersatz der wahren Verhältnisse annehmen, könnten wir auch von vornherein eine homogene Luftschicht mit horizontalem Spiegel (etwa von einem ebenen, natürlich reibungslos zu behandelnden Deckel abgegrenzt) zugrunde legen, also $H = \bar{H}$ vorschreiben und uns damit dieser selbstverschuldeten Schwierigkeit entheben.

IV. Schlußbemerkungen.

§ 15. Ausblick. Die in Kapitel II durchgeführte Rechnung für das zweidimensionale Problem erfuhr von vorneherein eine wesentliche Vereinfachung dadurch, daß die Grundgleichungen (5.1) und (5.2) sich ohne weiteres je einmal integrieren ließen. Es blieb nur die Behandlung einer einzigen nichtlinearen Differentialgleichung erster Ordnung übrig. Im allgemeineren Fall räumlich beliebig ausgedehnter Bodenerhebungen $z = \zeta\,(x, y)$ sind die vollständigen Gleichungen (5.1) und (5.2) zugrunde zu legen, aber es tritt eine ganz entsprechende Erleichterung ein, da man sie in der Gestalt (dimensionslos)

$$\operatorname{Div}\left[\mathfrak{V}\operatorname{Rot}\mathfrak{V} + \frac{B}{R}\,\mathfrak{V}\right] = 0 \quad (\operatorname{Rot}\mathfrak{V}\ \text{ist skalar!}) \quad \ldots\ldots \quad (15.1)$$

$$\operatorname{Div}\left[(1-\zeta)\,\mathfrak{V} + \frac{h}{\bar{H}}\,\bar{\mathfrak{V}}\right] = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15.2)$$

schreiben kann. Dabei sind die Geschwindigkeiten $\mathfrak{V}$ und $\bar{\mathfrak{V}} = \{-v, u\}$ mit irgendeiner für den Strömungsvorgang charakteristischen festen Geschwindigkeit V_0 dimensionslos gemacht und $R = V_0/2\,\omega'$ ist der zu dieser Geschwindigkeit gehörige Trägheitskreisradius. Hiervon abgesehen sind die Dimensionslosen wie in unserer obigen Theorie gebildet. Die Behandlung des Problems allgemeiner Bodengestalt erscheint demnach recht aussichtsreich, und sie wird gegenüber der Idealisierung des von uns behandelten „unendlich langen" Bergkamms wertvolle neue Aufschlüsse bringen. Das Problem erfährt zur Zeit seine Bearbeitung.

In unserer Theorie ist, wie einleitend ausgeführt wurde, eine bewußte Beschränkung auf den topographischen Einfluß vorgenommen, um zunächst dessen Wirkung allein auf den Strömungsverlauf zu untersuchen. Eine wirkliche Abtrennung dieses Einflusses von sämtlichen anderen, etwa auch von dem planetarischen Einfluß, ist jedoch, solange man die Reibung berücksichtigt, nicht möglich (siehe hierüber auch V. W. Ekman [2], S. 435 ff.), d. h. das Zusammenwirken beider Einflüsse ist nicht durch Addition der Einzelwirkungen zu erhalten. Berücksichtigt man in den Eulerschen Gln. (3.2) die Veränderlichkeit der Breite φ, so erhält man neben der unveränderten Kontinuitätsgleichung (15.2) eine um ein Zusatzglied erweiterte Gleichung an Stelle von (15.1), in welchem der planetarische Einfluß zum Ausdruck kommt. An der Gestalt der Gl. (15.1) ändert sich jedoch formal nichts, wenn man nur jetzt berücksichtigt, daß $R = V_0/2\,\omega \sin\varphi$ als ortsveränderliche Größe zu betrachten ist. Auch die Untersuchung dieses allgemeineren Problems des Zusammenspiels von topographischen und planetarischen Einflüssen wird zur Zeit durchgeführt.

Besonders einfach gestaltet sich selbstverständlich die Theorie des reibungslosen Falles ($h = 0$), der nach dem Ergebnis unserer obigen Abschätzung des Reibungseinflusses besonderes Interesse verdient. Hier empfiehlt es sich, neben der Kontinuitätsgleichung (15.2) an Stelle der nichtlinearen Gl. (15.1) den folgenden Wirbelsatz zu verwenden, den wir zum Schlusse kurz ableiten wollen.

Da das zum Felde der Hauptströmungsgeschwindigkeiten parallele Vektorfeld $\mathfrak{V}\,(1-\zeta) = \mathfrak{A}$ divergenzfrei ist, kann man durch Einsetzen von $\mathfrak{V} = \mathfrak{A}\,(1-\zeta)^{-1}$ in (15.1) sofort schließen, daß

$$\mathfrak{V} \circ \operatorname{Grad}\left\{(1-\zeta)^{-1}\left(\operatorname{Rot}\mathfrak{V} + \frac{B}{R}\right)\right\} = 0$$

ist, also gilt längs den einzelnen Stromlinien der Hauptströmung $\mathfrak{V}$ der Wirbelsatz:

$$\operatorname{Rot}\mathfrak{V} = -\frac{B}{R} + C\,(1-\zeta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15.1\,\mathrm{a}),$$

oder dimensionsbehaftet:

$$\operatorname{Rot}\mathfrak{V}^* = -2\,\omega\sin\varphi + C^*\left(1 - \frac{\zeta^*}{\bar{H}}\right)$$

XUM

(C, C^* auf Stromlinien der $\mathfrak{V}$-Strömung konstant). Aus dieser Gleichung erkennt man unmittelbar das Zusammenspiel der topographischen und der planetarischen Wirkungen.

Sofern man bewußt von dem planetarischen Einfluß absieht und also $\varphi = \text{const}$ setzt, ergibt sich bei Annahme einer drehungsfreien Anströmung vor dem Berg einfach

$$\text{Rot}\,\mathfrak{V} = -\frac{B}{R}\zeta .$$

V. Zusammenfassung.

Es wird eine allgemeine Theorie der stationären Strömung einer Flüssigkeitsschicht konstanter Dichte über weitausgedehnte schwache Bodenerhebungen auf der rotierenden Erde entwickelt mit dem Ziel, zur Klärung der Frage nach dem Einfluß der Bodentopographie auf den Verlauf der Strömungen im Meer und in der Atmosphäre beizutragen. Dabei wird der Einfluß der Sekundärströmung, welche durch das Absinken der Corioliskräfte in der bodennahen Reibungsschicht hervorgerufen wird, mitberücksichtigt. Von dem Einfluß der Erdkrümmung und von weiteren für den Verlauf ozeanischer und atmosphärischer Strömungen wesentlichen Einflüssen wird abgesehen.

Die mathematische Formulierung der Theorie führt zu verhältnismäßig einfachen Grundgleichungen, die zunächst im zweidimensionalen Fall (Strömung über langgestreckte Gebirgskämme etwa) allgemein in vollständiger Strenge gelöst werden. Die hergeleiteten einfachen Ausdrücke für Geschwindigkeitsverteilung, Isobaren- und Stromlinienverlauf gehen aus jenen hervor, die man ohne Berücksichtigung der Reibung erhält, indem man in den letzteren überall die jeweilige Bodenerhebung ζ durch eine in einfacher Weise aus ζ hervorgehende, gedachte Bodenerhebung ζ_i ersetzt. Die Spiegeleinsenkung ist in allen praktisch interessierenden Fällen für den Strömungsverlauf bedeutungslos.

Die Größenordnung der für die Strömungsvorgänge charakteristischen Parameter $\left(\text{insbesondere der für den Reibungseinfluß entscheidenden Dimensionslosen } G = \frac{R}{B}\frac{\overline{H}}{h}\right)$ läßt sich bei dem heutigen Stand unseres Wissens über die Gesetze turbulenter Strömung abschätzen. Auf Grund dieser Abschätzung kann man schließen, daß der Einfluß der Sekundärströmung auf den Verlauf der Hauptströmung bei den praktisch vorkommenden Verhältnissen, sowohl im Meer wie in der Atmosphäre, im allgemeinen eine völlig untergeordnete Rolle spielt; er kann jedoch eventuell in Grenzfällen stark in Erscheinung treten und den Verlauf der Strömung entscheidend beeinflussen.

Schrifttumverzeichnis.

[1] V. W. Ekman: Dynamische Gesetze der Meeresströmungen. Abgedruckt in „Vorträge aus dem Gebiet der Hydro- und Aerodynamik, Innsbruck 1922", herausgegeben von Th. v. Kármán und T. Levi-Civita 1924, S. 97—115.

[2] V. W. Ekman: Studien zur Dynamik der Meeresströmungen. Gerlands Beiträge zur Geophysik Bd. 36 (1932), S. 385—438.

[3] W. Paeschke: Experimentelle Untersuchungen zum Rauhigkeits- und Stabilitätsproblem in der bodennahen Luftschicht. Diss. Göttingen 1936. Erschienen in Beitr. z. Phys. d. fr. Atmosphäre Bd. 24 (1937), S. 163—189.

[4] L. Prandtl: Meteorologische Anwendungen der Strömungslehre. Bjerknes-Festschrift der Beitr. z. Phys. d. fr. Atmosphäre Bd. 19 (1932), S. 188—202.

[5] L. Prandtl: Beiträge zur Mechanik der Atmosphäre. Mémoire présenté à l'Association Météorologique de l'U. G. G. I. Edimbourg, Septembre 1936. Paris 1939.

[6] L. Prandtl: Abriß der Strömungslehre. Abschnitt über „Reibungswind und ähnliches" aus der demnächst erscheinenden Neuauflage.

[7] H. Schlichting: Experimentelle Untersuchungen zum Rauhigkeitsproblem. Ing.-Arch. Bd. 7 (1936), S. 1—34.

287

Nachtrag:

Nach Abschluß dieser Arbeit bin ich der Aufforderung nachgekommen, in einem zusammenfassenden Bericht kurz über die neueren Arbeiten aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Strömungsforschung, Göttingen, zum Problemkreis der atmosphärischen und ozeanischen Strömungen zu berichten. In diesem Bericht sind auch die Grundgedanken und einige Ergebnisse der obigen ausführlichen Mitteilung veröffentlicht worden. Siehe:

[8] H. Görtler: Neuere Beiträge zur Dynamik atmosphärischer und ozeanischer Strömungen. Naturwiss. 29. Jahrg. (1941), S. 473—479.

Z. angew. Math. Mech. Bd. 21 Nr. 5 Okt. 1941

Zur rechnerischen Auflösung einer Gleichung vierten Grades.

Von *Helmut Heinrich* in Breslau.

Für eine reelle Gleichung vierten Grades wird aus der Tatsache, daß ihre kubische Resolvente stets eine positive reelle Wurzel besitzt, ein einfaches, schnell arbeitendes Verfahren zur gleichzeitigen Bestimmung aller ihrer Wurzeln (auch der komplexen) entwickelt und ein Rechenschema dafür bereitgestellt.

Hat man von einer Gleichung höheren Grades auch die komplexen Wurzeln zu bestimmen, so wendet man in der Regel das Graeffe-Verfahren an. Daß man bei diesem zunächst nur die absoluten Beträge der Wurzeln erhält, muß in Anbetracht der Überlegungen, die dazu notwendig sind, um daraus die Vorzeichen und Real- und Imaginärteil zu gewinnen, ohne Zweifel als ein Mangel bezeichnet werden, der sich vor allem dann bemerkbar macht, wenn die Rechnung, wie es in vielen Betrieben der Fall ist, von mathematisch ungeschulten Kräften durchgeführt werden soll. Darüber hinaus schleichen sich erfahrungsgemäß leicht Vorzeichen- und Stellenwertfehler ein, die eine dauernde umständliche Kontrolle der Rechnung erforderlich machen[1]).

Es soll deshalb in den folgenden Ausführungen wenigstens zur numerischen Auflösung von Gleichungen vierten Grades mit reellen Koeffizienten (Gleichungen fünften Grades lassen sich ohne Schwierigkeit durch Abspaltung einer stets vorhandenen reellen Lösung darauf zurückführen) ein Verfahren angegeben werden, das als wesentlich einfacher und leistungsfähiger als das Graeffe-Verfahren bezeichnet werden darf und auch von Hilfskräften ohne weiteres vollständig durchgerechnet werden kann. Es liefert bei einem nur geringen Aufwand an Arbeitszeit sämtliche vier Wurzeln, auch die komplexen, auf einmal, und zwar unmittelbar einschließlich Vorzeichen und Real- und Imaginärteil. Die zu leistende Rechenarbeit besteht im wesentlichen in der Bestimmung einer — von vornherein als vorhanden feststehenden — positiven reellen Wurzel einer Gleichung dritten Grades (der kubischen Resolvente der verkürzten Gleichung vierten Grades) und in der Ausführung einiger weniger elementarer Rechnungen nach einem festen Schema.

Das Verfahren.

Lautet die gegebene Gleichung

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \qquad (1),$$

so bringen wir sie zunächst dadurch, daß wir die linke Seite mittels des Hornerschen Schemas nach Potenzen von

$$s = x + \frac{1}{4} A \qquad (2)$$

entwickeln, auf die verkürzte Form

$$f(s) = s^4 + a s^2 + b s + c = 0 \qquad (3).$$

Aus ihren Koeffizienten a, b, c bilden wir die Zahlen

$$\alpha = 2a, \quad \beta = a^2 - 4c, \quad \gamma = -b^2 \qquad (4)$$

und stellen mit ihnen die kubische Gleichung

$$R(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0 \qquad (5)$$

auf. Da ihr absolutes Glied γ negativ ist, hat sie stets mindestens eine positive reelle Wurzel. Unsere erste und wichtigste Aufgabe besteht darin, eine solche positive Lösung von (5) zu bestimmen, am besten, wenn mehrere vorhanden sind, die größte, weil man bei ihr am ehesten eine gute Konvergenz des Newtonschen Näherungsverfahrens erwarten kann, vor allem, wenn man sich ihr von rechts her nähert.

Mit der Bestimmung dieser einen Wurzel z der kubischen Gleichung — die Rechnung erfolgt wieder mit Hilfe des Hornerschen Schemas — ist die Hauptarbeit geleistet. Denn kennt man z, so hat man nur noch

$$\xi = \pm \frac{1}{2}\sqrt{z} \qquad (6)$$

und

$$f'(\xi) = 4\xi^3 + 2a\xi + b = \xi(4\xi^2 + 2a) + b = \xi(z + 2a) + b \qquad (7)$$

zu berechnen und erhält mit den vier möglichen Vorzeichenkombinationen in

$$s = \xi \pm \sqrt{-f'(\xi)/4\xi} \qquad (8)$$

alle vier Wurzeln der verkürzten Gl. (3) und aus ihnen mit Hilfe von (2) diejenigen von (1).

[1]) Runge-König: Numerisches Rechnen, Berlin 1924, S. 164 ff.

Zweifellos ist es ein Vorzug des Verfahrens, daß sich die Genauigkeit, mit der die eine Wurzel z berechnet ist, unmittelbar auf alle vier Wurzeln der Gleichung vierten Grades überträgt.

Die Grundlage des Verfahrens.

Das Verfahren beruht auf einem Satz der allgemeinen algebraischen Theorie der Gleichung vierten Grades, der besagt, daß man die Wurzeln der verkürzten Gleichung vierten Grades (3) durch Wurzelausdrücke, die die Lösungen oder wenigstens eine Lösung der kubischen Resolvente enthalten, ausdrücken kann[2]). Daß diese Tatsache bisher vom praktischen Rechner nicht ausgenutzt worden ist, mag daran liegen, daß ihre in den Lehrbüchern der Algebra meist in sehr abstrakten Zusammenhängen gegebene Darstellung natürlicherweise auf die praktisch-mathematischen Bedürfnisse keine Rücksicht nimmt und daher das Ergebnis in einer für die numerische Behandlung zunächst nicht geeignet erscheinenden Form liefert.

Nach einer schon von Euler angegebenen Methode kann man s durch $u+v+w$ ersetzen und u, v, w so bestimmen, daß $u^2+v^2+w^2=-2a$ und $u\,v\,w=-b$ ist. Dann kann man zeigen, daß u^2, v^2, w^2 die Wurzeln der kubischen Resolvente (5) sind. Sind sie bekannt, so hat man daraus u, v, w mit den geeigneten Vorzeichen — es muß $u\,v\,w=-b$ sein! — zu bestimmen, und die vier Wurzeln von (3) sind durch

$$\left.\begin{aligned} s_1&=\frac{1}{2}(u+v+w), & s_2&=\frac{1}{2}(u-v-w), \\ s_3&=\frac{1}{2}(-u+v-w), & s_4&=\frac{1}{2}(-u-v+w) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

gegeben. Daraus kann man dann weiter herleiten, daß, wenn u^2 eine Wurzel der Resolvente ist, sich alle vier s_i durch sie in der Form

$$s=\pm\frac{1}{2}u\pm\sqrt{-\frac{1}{4}u^2-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b/\pm u} \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

ausdrücken lassen. Daraus läßt sich übrigens umgekehrt ausrechnen, daß

$$(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)=f(s)+\frac{1}{4}R(u^2)/u^2 \quad \ldots\ldots (11)$$

ist, womit in Evidenz bestätigt ist, daß man mit (10) alle Wurzeln von (3) erfaßt hat.

Die Resolvente (5) hat nun wegen des negativen absoluten Gliedes $\gamma=-b^2$ stets eine positive reelle Wurzel u^2, und daher kann in (10), wo man ja nur eine Wurzel der Resolvente braucht, u reell und positiv angenommen werden. Diese für die Zwecke des numerischen Rechnens entscheidende Tatsache ist bisher offenbar wenig beachtet worden. Der Grund dafür liegt wohl nicht zuletzt darin, daß man bei der oben skizzierten bisher üblichen Ableitung von den drei an Stelle von s neu eingeführten Unbekannten u, v und w annehmen muß, daß sie auch komplex sein können. Verzichten wir aber auf die dabei erreichte, an sich sehr schöne Symmetrie und setzen mit nur zwei Unbekannten ξ und η, die wir jedoch als reell voraussetzen,

$$s=\xi+\sqrt{\eta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12),$$

so geht (3) über in

$$f(\xi)+\eta(\eta+6\xi^2+a)+\sqrt{\eta}\,(f'(\xi)+4\xi\eta)=0 \quad \ldots\ldots\ldots (13).$$

Den einen Freiheitsgrad, den wir (gegenüber zweien bei der anderen Methode) durch den Ansatz (12) gewonnen haben, benutzen wir dazu, um (13) in die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &(14_1) \quad f(\xi)+\eta(\eta+6\xi^2+a)=0 \\ &(14_2) \quad f'(\xi)+4\xi\eta=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

aufzuspalten. Dabei haben wir beim zweiten Teil auf den Faktor $\sqrt{\eta}$ verzichten können. Denn ist $\eta=0$, so reduziert sich (13) wieder auf $f(\xi)=0$, und wir sind wieder am Ausgangspunkt angelangt. Nach der Aufspaltung in (14) bleibt trotzdem der Fall $\eta=0$ von Bedeutung. Er besagt dann, daß $f(\xi)$ und $f'(\xi)$ gleichzeitig verschwinden und somit ξ eine mehrfache Wurzel ist.

ξ können wir von Null verschieden annehmen, da $\xi=0$ $b=f'(0)=0$ nach sich zieht und für s^2 eine mit elementaren Mitteln lösbare rein quadratische Gleichung liefert.

Setzen wir nun aus (14_2)

$$\eta=-f'(\xi)/4\xi=-\left(\xi^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}b/\xi\right) \quad \ldots\ldots\ldots (15)$$

---

[2]) z. B. Bieberbach-Bauer: Algebra, Leipzig 1928, insbes. S. 212 f.

Rechenplan für die Gleichung $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$.

I. Verkürzung der Gleichung und Berechnung der Koeffizienten der Resolvente.

$-\frac{1}{4}A = \oplus.$

1	A	B	C	D		
	$\oplus$	·	·	·		
	·	·	·	c	$-4c$	
	$\oplus$	·	·			
	·	·	b			b^2
	$\oplus$	·				
	·	a		$2a$	a^2	
				$\alpha = 2a$	$\beta = a^2 - 4c$	$\gamma = -b^2$

II. Bestimmung der Wurzel der kubischen Resolvente $z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$.

z_0	1	α	β	γ	
		z_0	·	·	
		·	·	↓	
		z_0	·		
		·	↓		
		z_0	↓	↓	
		·	g_1'	g_1	$-g_1/g_1' = \delta_1$
δ_1		δ_1	·	·	
		·	·	↓	
		δ_1	·		
		·	↓		
		δ_1	↓	↓	
		·	g_2'	g_2	$-g_2/g_2' = \delta_2$
δ_2		δ_2	·	·	
		·	·	↓	
		δ_2	·		
		·	↓		
		δ_2	↓	↓	
		·	g_3'	g_3	$-g_3/g_3' = \delta_3$
δ_3		δ_3	·	·	

. . . . usf.

$z = z_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \cdots$

III. Berechnung der vier Wurzeln der gegebenen Gleichung aus z.

z		·			
A_1	$z + 2a$	·			
A_2	$\pm \frac{1}{2}\sqrt{z}$	·		·	
A_3	$A_1 A_2$	·		·	
A_4	$A_3 + b$	·		·	
A_5	$-A_4/4A_2$	·		·	
A_6	$\pm\sqrt{A_5}$	·	·	·	·
s	$A_2 + A_6$	·	·	·	·
x	$s - \frac{1}{4}A$	x_1	x_2	x_3	x_4

in (14_1) ein, so erhalten wir nach einfacher Rechnung

$$-4\xi^4 - 2a\xi^2 - \left(\frac{1}{4}a^2 - c\right) + b^2/16\xi^2 = -R(4\xi^2)/16\xi^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Die bereits mehrfach hervorgehobene Tatsache, daß $R(z) = 0$ mindestens eine positive Wurzel besitzt, zeigt uns, daß $R(4\xi^2) = 0$ mit reellem ξ erfüllbar ist. Man braucht dazu nur für eine solche positive Wurzel z der Resolvente in Übereinstimmung mit (6) $4\xi^2 = z$ zu setzen. Die in (10) angeschriebenen vier Wurzeln s von (3) erscheinen dann in der besonders einfachen Form (8), auf der wir unser Verfahren aufgebaut haben.

Praktische Durchführung und Zahlenbeispiel.

Die Rechnung erfolgt zweckmäßig nach dem beigefügten Plan, der bei Kenntnis des Hornerschen Schemas ohne weiteres verständlich ist. Das Newtonsche Verfahren zur Verbesserung eines Näherungswertes z_0 von z wird in der Form verwendet, daß die linke Seite der Resolventengleichung fortlaufend nach Potenzen des Fehlers entwickelt wird. Das hat den Vorteil, daß man auch bei der Bestimmung von z auf mehrere Dezimalen weitgehend mit dem Rechenschieber auskommt.

Im folgenden ist die vollständige Rechnung für die Auflösung der an anderer Stelle[3]) mit dem Graeffe-Verfahren behandelten Gleichung

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 5x - 10 = 0$$

wiedergegeben.

I. 1							
	1	−4	5	5	−10		
		1	−3	2	7		
		−3	2	7	−3	12	
		1	−2	0			
		−2	0	7			49
		1	−1				
		−1	−1		−2	1	
					−2	13	−49

II. $z_0 = 3$					
	1	−2	13	−49	
		3	3	48	
		1	16		
		3	12		
		4			
		3			
		7	28	−1	$1/28 = 0{,}036$
0,036		0,036	0,253	1,017	
		7,036	28,253		
		0,036	0,255		
		7,072			
		0,036			
		7,108	28,508	0,017	$-0{,}017 : 28{,}508 = -0{,}0006$
−0,0006		−0,001	−0,426	−0,017	
		7,107	28,082	0,000	
$z = 3{,}0354$					

III.

z		3,0354			
A_1	$z-2$	1,3054			
A_2	$\pm\frac{1}{2}\sqrt{z}$	0,8711		−0,8711	
A_3	$A_1 A_2$	0,9019		−0,9019	
A_4	$A_3 + 7$	7,9019		6,0981	
A_5	$-A_4/4A_3$	−2,2678		1,7501	
A_6	$\pm\sqrt{A_5}$	$1{,}5059\,i$	$-1{,}5059\,i$	1,3229	−1,3229
s	$A_2 + A_6$	$0{,}8711 \pm 1{,}5059\,i$		0,4518	−2,1940
x	$s+1$	$1{,}8711 \pm 1{,}5059\,i$		1,4518	−1,1940

[3]) Willers: Methoden der praktischen Analysis, Berlin 1928, S. 209 ff.

KLEINE MITTEILUNGEN

Ergänzung zur Theorie der Grenzlinien adiabatischer Potentialströmungen. In meinem Aufsatz[1]) über dieses Thema (vgl. insbesondere Abschnitt 4) konnte der Beweis, daß die durch die Gl. (24) und (14) definierte Grenzlinie eine Rückkehrkante der Stromlinien ist, nicht in voller Allgemeinheit geführt werden; denn das benötigte Nichtverschwinden des Ausdruckes (30) mußte im Grunde zusätzlich vorausgesetzt werden. Ein Verschwinden von (30) blieb, wenn auch ausnahmsweise, immerhin möglich.

Im weiteren Verlauf meiner Untersuchungen (vgl. die Abschnitte 5 und 6) hatte sich die grundlegende Bedeutung der Tatsache herausgestellt, daß der Grenzhodograph kein charakteristischer Hodograph ist. Diese Eigenschaft kann man leicht an den bekannten Beispielen von Grenzlinien bestätigen. Da ich diese Tatsache aber nicht als zusätzliche Voraussetzung einführen wollte, hatte ich einen allgemeinen Beweis dafür angesetzt. Dabei war die Übertragbarkeit der Richtungsübereinstimmung zweier Kurven aus dem Geschwindigkeits- in den Ortsplan benutzt. Diese Übertragbarkeit gilt auch noch auf dem Grenzhodographen, wie man nach (14) ausrechnen kann, es sei denn, daß neben der Grenzgleichung gleichzeitig $\frac{d\vartheta}{dq} = -\frac{\psi_q}{\psi_\vartheta}$ ist. In diesem Falle nimmt nämlich $\frac{dy}{dx}$ den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$ an. Da dieser Ausnahmefall bei dem erwähnten Beweis hineinspielt, so ist die eingeschlagene Beweisführung zu bemängeln.

Es ist bemerkenswert, daß die beiden aufgezeigten Lücken in der allgemeinen Theorie der Grenzlinien sich im Zuge einer und derselben Überlegung schließen lassen.

Wir beginnen mit der Neufassung des Beweises dafür, daß der Grenzhodograph kein charakteristischer Hodograph ist. In den Gleichungen (35a) und (35b) waren als notwendige Bedingungen für das Zusammenfallen des Grenzhodographen mit einem charakteristischen Hodographen entweder

$$\frac{d\vartheta}{dq} = -\frac{\psi_q}{\psi_\vartheta} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (35\text{a})$$

oder

$$\frac{d\vartheta}{dq} = \frac{\psi_q}{\psi_\vartheta} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (35\text{b})$$

erkannt worden. Von da ab schließen wir jetzt so weiter. Der Richtungstangens $\frac{d\vartheta}{dq}$ des Grenzhodographen wird unmittelbar aus der Grenzgleichung

$$F(q,\vartheta) = \psi_q^2 - \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{q^2}\right)\psi_\vartheta^2 = 0$$

zu

$$\frac{d\vartheta}{dq} = -\frac{F_q}{F_\vartheta} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (35\text{c})$$

ausgerechnet. Es ist

$$\left.\begin{aligned} F_q &= 2\,\psi_{qq}\,\psi_q - \left[\frac{(\varkappa-1)\,q}{a^2} + \frac{2}{q^3}\right]\psi_\vartheta^2 \\ &\quad - 2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{q^2}\right)\psi_{q\vartheta}\,\psi_\vartheta \\ F_\vartheta &= 2\,\psi_{q\vartheta}\,\psi_q - 2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{q^2}\right)\psi_{\vartheta\vartheta}\,\psi_\vartheta \end{aligned}\right\} (35\text{d}).$$

Die erste Möglichkeit (35a) läßt sich nun sofort ausschließen; denn (35a) bedeutet konstantes $\psi(q,\vartheta)$, definiert also eine Stromlinie. Die Grenzlinie kann aber als Mach sche Welle nicht mit einer Stromlinie zusammenfallen. Setzt man nun (35c) unter Benutzung von (35d) in (35a) ein, so kann man die eben erkannte Unmöglichkeit auch so formulieren, daß

$$\begin{aligned} &2\,\psi_{qq}\,\psi_q + 2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{q^2}\right)\psi_{\vartheta\vartheta}\,\psi_q \\ &\qquad - \frac{2\,\psi_{q\vartheta}}{\psi_\vartheta}\left[\psi_q^2 + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{q^2}\right)\psi_\vartheta^2\right] \\ &\qquad - \left[\frac{(\varkappa-1)\,q}{a^2} + \frac{2}{q^3}\right]\psi_\vartheta^2 \neq 0 \end{aligned}$$

wird. Die linke Seite dieser Ungleichung ist aber mit (30) identisch. Da nunmehr das Nichtverschwinden von (30) bewiesen ist, so ist gemäß der Bemerkung am Eingang dieser Mitteilung jetzt ohne jede Einschränkung gezeigt, daß die Grenzlinie eine Rückkehrkante der Stromlinien ist.

Zum Ausschluß der zweiten Möglichkeit (35b) setzen wir (35c) unter Berücksichtigung von (35d) in (35b) ein. Danach würde

$$\begin{aligned} &2\,\psi_{qq}\,\psi_q - 2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{q^2}\right)\psi_{\vartheta\vartheta}\,\psi_q \\ &\qquad + \frac{2\,\psi_{q\vartheta}}{\psi_\vartheta}\left[\psi_q^2 - \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{q^2}\right)\psi_\vartheta^2\right] \\ &\qquad - \left[\frac{(\varkappa-1)\,q}{a^2} + \frac{2}{q^3}\right]\psi_\vartheta^2 = 0 \end{aligned}$$

erforderlich sein. Das dritte Glied der linken Seite verschwindet wegen der Grenzgleichung. Die beiden ersten Glieder werden nach der Tschaplig in schen Differentialgleichung (15) umgeformt, so daß sich schließlich als Bedingung

$$-\frac{2}{q}\left(1 + \frac{q^2}{a^2}\right)\psi_q^2 - \left[\frac{(\varkappa-1)\,q}{a^2} + \frac{2}{q^3}\right]\psi_\vartheta^2 = 0$$

ergibt. Da die linke Seite wesentlich negativ ist, so ist ein Widerspruch aufgewiesen und damit auch die zweite Möglichkeit ausgeschlossen. Es gilt daher allgemein, daß der Grenzhodograph kein charakteristischer Hodograph ist.

Dresden. W. Tollmien. 307

[1]) Z. angew. Math. Mech., Bd. 21 (1941), S. 140 bis 152.

Die Grundgleichungen der Segeltheorie unter Berücksichtigung der Segelneigung in Längs- und Querrichtung.

Die Prandtlsche Tragflügeltheorie hat auch auf dem Gebiet des Segelns zu einer neuen Betrachtungsweise der Vorgänge am segelnden Boot geführt. Im Zusammenhang damit wurde die Einführung dimensionsloser Beiwerte für Auftrieb und Widerstand vorgenommen, die in der Segeltheorie zunächst die Aufstellung elementarer Gleichungen für Vor- und Quertrieb ermöglichten.

$$V = c_V \cdot F \cdot q; \quad S = c_S \cdot F \cdot q \cdot$$
$$(F = \text{Segelfläche}; \; q = \text{Staudruck}).$$

Die Beiwerte c_V und c_S ergeben sich aus den Beziehungen

$$c_V = c_a \sin \alpha^* - c_w \cos \alpha^*$$

und

$$c_S = c_a \cos \alpha^* + c_w \sin \alpha^*.$$

α^* ist der Winkel zwischen relativem Wind und Fahrtrichtung. Diese Gleichungen hätten allgemeine Gültigkeit, wenn Vor- und Quertriebskräfte und etwa außer diesen entstehende Kräfte unabhängig von der wechselnden seitlichen Bootsneigung (Krän-

gung) wären. Dies ist aber nicht der Fall. In Wirklichkeit treten, je nach Anlage des Segels und Krängung des Bootes veränderliche aufwärts, oder abwärts gerichtete Kräfte hinzu. Ihre Mitberücksichtigung ist daher erforderlich. Sie geschieht nun derart, daß man eine Querebene durch den relativen Wind annimmt und auf diese Ebene das Segel innerhalb einer senkrecht zur Kraftresultierenden des Segels liegenden Ebene gekippt denkt. In der Querebene des relat. Windes liegt nunmehr die Projektion der Resultierenden (der Auftrieb) in einem Winkel $\pm\eta$ zur Horizontalen, je nach ursprünglichen Anlage und späterer Krängung des Segels, während der Widerstand senkrecht zur Querebene steht. Bei ebenen unendlich glatten Flächen vollzieht sich dies Kippen in der Ebene der Fläche selbst. Die weiter angegebenen Beziehungen gelten für diesen Fall streng. Handelt es sich aber um gewölbte Flächen, oder Profilsegel mit oder ohne Verwindung, so wird hierbei die Vernachlässigung einer durch die Krängung entstehenden, oder sich verändernden „Pfeilstellung" in den Kauf genommen. Eine rechnerische Berücksichtigung der letzteren ist nicht möglich; es läßt sich aber auf Grund vorhandenen Versuchsmaterials und Überlegungen theoretischer Art sagen, daß ihr Einfluß in den meisten Fällen vernachlässigbar klein ist. Man darf daher annehmen, daß die Richtung der Resultierenden im Raume durch das Kippen des Segels in einer zu ihr senkrechten Ebene unverändert bleibt.

Die Grundgleichungen nehmen auf Grund trigonometrischer Rechnungen nunmehr folgende Form an:

$$c_v = c_a \cos\eta \sin\alpha^* - c_w \cos\alpha^*$$

und

$$c_S = c_a \cos\eta \cos\alpha^* + c_w \sin\alpha^*.$$

Für η gilt

$$\operatorname{tg}\eta = \frac{\operatorname{tg}\alpha' - \dfrac{\operatorname{tg}(\beta' + \varphi)\operatorname{tg}\nu}{\cos\alpha'}}{\cos\alpha + \sin\alpha \operatorname{tg}(\beta' + \varphi)}.$$

Hierin bedeuten α Winkel zwischen Bootsmittellinie und relativem Wind, α' Krängungswinkel und ν Mastneigung nach achtern. β' ist der Winkel zwischen Bootsmittellinie und der Schnittlinie der Mastbaum-Ebene des Segels mit der horizontalen Ebene.

$$\operatorname{tg}\beta' = \frac{1}{\dfrac{\cos\alpha'}{\operatorname{tg}\beta \cdot \cos\nu} + \sin\alpha' \operatorname{tg}\nu}.$$

φ ist der Winkel der Resultierenden des Segels mit der Lotrechten auf derjenigen Sehne des Segels, auf welche die Segelpolare bezogen ist (in der Regel ist dies der Baum).

Zur Berechnung des Quermomentes bedient man sich eines Beiwertes

$$c_S' = \frac{c_S}{\cos(\alpha' - \gamma)\cos\gamma}.$$

γ berechnet sich aus $\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\beta \cdot \sin\nu$.

Der Auftriebsbeiwert des Segels muß jeweils auf Grund der gegebenen Segelstellung nach der Polare des Segels erst festgestellt werden, da sich bei Krängung des Bootes der Einfallswinkel δ des Windes zur Mast-Baum-Ebene ändert. Hierbei ist

$$\sin\delta = \sqrt{1 - \cos^2\beta' \cdot \sin^2(\alpha' - \gamma)} \cdot \sin(\alpha - \beta').$$

Nach der Polare wird auch der Winkel φ für Winkel δ berechnet, und gilt positiv bei Neigung nach vorne gegenüber der Lotrechten auf der Bezugssehne.

Ist β konst. der günstigste Einstellwinkel des Segels in aufrechter Lage, so ergeben sich beim Krängen des Bootes Vortriebsverluste. Ihre Ursache liegt einmal im Abfall des Auftriebes infolge Verringerung des Einfallswinkels des Windes und andrerseits in einer Verringerung der horizontalen Komponente desselben wegen Neigung des Auftriebes um $\measuredangle\eta$ nach abwärts. Je nach der Polare des Segels und der gewählten Einstellung desselben, sowie der vorhandenen Mastneigung nach achtern, wirken sich beide Effekte verschieden aus. Es besteht daher generell kein Zusammenhang mit dem cos. des Krängungswinkels, wie bisher angenommen wurde. Von den c_S und c_S'-Werten gilt analoges. Bild 1 und 2 zeigen dieses auf Grund der Polare eines Hochsegels, die im Windkanal gewonnen wurde. Mastneigung nach achtern war nicht vorhanden. Die Kurven sind errechnet. Aerodynamisch bessere Aggregate, Profilsegel usw. verhalten sich ähnlich; die Vortriebsverluste sind — immer bezogen auf die günstigste Stellung in aufrechter Lage — kleiner.

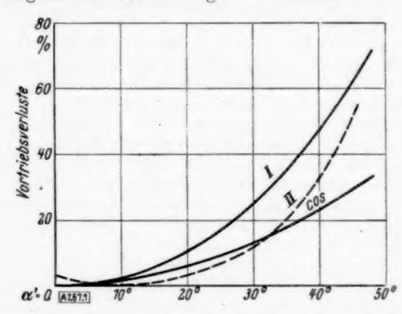


Bild 1. Vortriebsverluste zweier Hochsegel in Abhängigkeit von der Krängung.
Segel I $\measuredangle\nu = 0$; Segel II $\measuredangle\nu = 30°$.
Einfallswinkel des Windes zum Boot: $\alpha = 30°$.

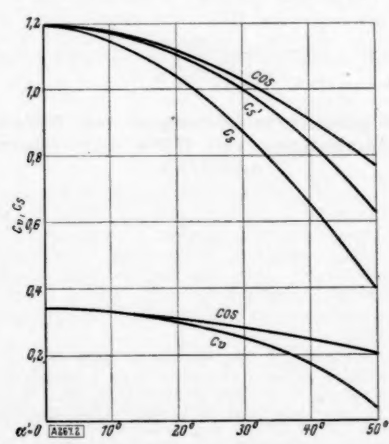


Bild 2. Vor- und Quertriebskräfte eines Hochsegels in Abhängigkeit vom Krängungswinkel α'.
Einfallswinkel des Windes zum Boot: $\alpha = 30°$; $\measuredangle\nu = 0$.

Die Beibehaltung der für aufrechte Bootslage besten Einstellung des Segels auch in geneigter Lage erweist sich allgemein als am vorteilhaftesten. Ein schärferes Anholen des Segels würde zwar $\measuredangle\delta$ wieder vergrößern, jedoch würde dem nunmehr vergrößerten Krängungsmoment eine größere Neigung entsprechen, und der Verlust wäre im allgemeinen noch größer. Entscheidend ist hierbei der Verlauf der Stabilitätskurve des Bootes. Von

zweifelhaftem Vorteil für den Vortrieb und bedenklich im Hinblick auf die Stabilität erweist sich die Verwendung selbsttätig sich auf konstanten Anstellwinkel einstellender Segel; letzteres besonders deswegen, weil die natürliche Abnahme des Quermomentes bei der Krängung sich als größer erweist, als allgemein angenommen wird.

Eine andere Arbeitsweise zeigen Segel mit nach achtern geneigter Drehachse (Mast). Der Anstellwinkel δ wächst während der Krängung bis zu einer Schräglage, die der Beziehung $\operatorname{tg}\beta' = \frac{\sin\alpha'}{\operatorname{tg}\nu}$ entspricht, um von dort langsamer abzunehmen, als bei Segeln mit lotrechter Achse. Dieser Verlauf der Winkeländerung gibt eine Erklärung dafür, daß die Vorsegel länger vollstehen, als das Großsegel. Die Vortriebsverluste sind wesentlich geringer und erreichen den Wert Null ebenfalls bei $\operatorname{tg}\beta' = \frac{\sin\alpha'}{\operatorname{tg}\nu}$, da nunmehr die Kraftresultierende horizontal liegt.

Es besteht demnach ein Zusammenhang zwischen Krängungswinkel und günstigster Neigung des Mastes, oder der Vorsegelachsen nach achtern, und es erweist sich, daß rankere Fahrzeuge auch geneigtere Segelachsen erfordern; besonders die unter starker Belastung stehenden Vorsegel.

Die Momente solcher Segel sind bei gleichen Vortrieben geringer als bei lotrechten Masten. — Das Verhältnis von Quer- zu Vortrieb wird durch Krängung bis etwa 30° kaum beeinflußt, darüber hinaus verschlechtert. Auch diese nachteilige Wirkung vermindert sich sehr wesentlich durch Neigung des Segels nach achtern.

Vorliegende Betrachtungen geben den Grundgleichungen der Segeltheorie eine allgemeine Form. Sie gestatten nunmehr die Arbeit des Segels in allen Lagen zu übersehen und sind auch unverändert auf die Bewegung der Bootsflosse (Kiel) im Wasser anwendbar.

Damit ist ein umstrittenes Problem der quantitativen Behandlung zugänglich gemacht und aufgehellt worden. Mit Hilfe von Segel- und Bootspolare ist es jetzt möglich, das gesamte Kräftespiel am segelnden Fahrzeug zu verfolgen.

Redecz-Kalny. Hans von Schulmann. 267

Über genäherte Lösungen von Differentialgleichungen mit Hilfe von Minimalansätzen [1].

Für ein einfaches Beispiel aus der Balkenbiegung wird die Näherungslösung erst mit Hilfe des Minimalansatzes der potentiellen Energie, dann mit Hilfe eines anderen gelegentlich angewandten Minimalansatzes gefunden und die Ergebnisse mit der richtigen Lösung verglichen. Die z. T. sonderbaren Ergebnisse werden zum Schlusse untersucht und erklärt.

Als Beispiel ist ein Balken genommen, der in den Punkten $x = -1$ und $x = +1$ gestützt ist. Die Belastung $q(x)$ sei symmetrisch, also $q(x) = q(-x)$; für gegebene Belastung wird die Durchbiegung $y(x)$ gesucht; $\frac{d^2 y}{d x^3}$ ist das negative Biegemoment, $\frac{d^4 y}{d x^4}$ ist die Belastung:

$$\frac{d^4 y}{d x^4} - q(x) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Die gewählte Näherungslösung sei $f(x)$. Der Minimalansatz der potentiellen Energie gibt:

$$\int_0^1 \left[\left(\frac{d^2 f(x)}{d x^2}\right)^2 - 2 q(x) f(x)\right] d x = \text{Min} \quad . . \quad (2).$$

[1]) Nach einem Dresdener Vortrag.

Der zweite Minimalansatz ist:

$$\int_0^1 \left(\frac{d^4 f(x)}{d x^4} - q(x)\right)^2 d x = \text{Min} \quad . . . . \quad (3).$$

Die Randbedingungen sind:

$f(-1) = f(+1) = 0$ (Durchbiegung gleich null)

$\frac{d^2 f(-1)}{d x^2} = \frac{d^2 f(+1)}{d x^2} = 0$

(Biegemomente gleich null).

Nur die richtige Lösung macht das Integral der Gl. (3) zum Minimum, das den Wert null hat.

Die Untersuchung ist im weiteren aus Symmetriegründen nur für die rechte Balkenhälfte $0 \leq x \leq 1$ durchgeführt. Als Balkenbelastung ist gewählt nach Bild 1:

$$q(x) = q_1(x) + q_2(x) \quad . . . . \quad (4)$$

mit

$q_1(x) = 1$ für $0 \leq x < 0{,}9$

$q_1(x) = 0$ für $0{,}9 < x \leq 1$

und

$q_2(x) = 0$ für $0 \leq x < 0{,}9 - \varepsilon$

$q_2(x) = -\frac{1{,}2}{\varepsilon}$ für $0{,}9 - \varepsilon < x < 0{,}9$

$q_2(x) = 0$ für $0{,}9 < x \leq 1$.

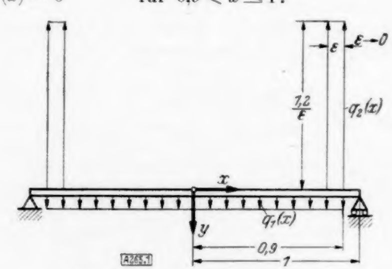


Bild 1. Gewählte Belastung.

Wir lassen $\varepsilon \to 0$ gehen und erhalten an der Stelle $x = 0{,}9$ die Einzelkraft von der Größe $-1{,}2$.

Es werde erst die genaue Lösung ermittelt, um später hiermit die Näherungslösungen vergleichen zu können. Für die Teilbelastung $q_1(x)$ erhält man die Durchbiegung y_1; für diese gilt:

für $0 \leq x < 0{,}9$

$$\frac{d^4 y_1}{d x^4} = 1$$

$$\frac{d^2 y_1}{d x^2} = 0{,}5\, x^2 - 0{,}495$$

$$y_1 = 0{,}0416..\, x^4 - 0{,}2475\, x^2 + 0{,}2058375$$

und für $0{,}9 < x \leq 1$

$$\frac{d^4 y_1}{d x^4} = 0$$

$$\frac{d^2 y_1}{d x^2} = 0{,}9\, x - 0{,}9$$

$$y_1 = 0{,}15\, x^3 - 0{,}45\, x^2 + 0{,}1215\, x + 0{,}1785.$$

Für die Teilbelastung $y_2(x)$ erhält man mit $\varepsilon \to 0$ die Durchbiegung y_2, wobei $\frac{d^2 y_2}{d x^2}$ als negatives Moment zu bestimmen ist:

für $0 \leq x \leq 0{,}9$

$$\frac{d^2 y_2}{d x^2} = 0{,}12$$

$$y_2 = 0{,}06\, x^2 - 0{,}0598$$

und für $0{,}9 \leq x \leq 1$

$$\frac{d^2 y_2}{d x^2} = -1{,}2\,x + 1{,}2$$

$$y_2 = -0{,}2\,x^3 + 0{,}6\,x^2 - 0{,}486\,x + 0{,}086\,.$$

Die gesamte Durchbiegung $y = y_1 + y_2$ ist überall positiv. In der Mitte für $x = 0$ erhält man

$$y_m = 0{,}2058375 - 0{,}0598 = 0{,}1460375\,.$$

Als Näherung für beide Minimalansätze nehmen wir die Durchbiegung der Belastung $q_1(x)$, die wir mit einem noch frei wählbaren Beiwert multiplizieren:

$$f(x) = a\,(0{,}0416\,..\,x^4 - 0{,}2475\,x^2 + 0{,}2058375)$$

für $0 \leq x \leq 0{,}9$ und

$$f(x) = a\,(0{,}15\,x^3 - 0{,}45\,x^2 + 0{,}1215\,x + 0{,}1785)$$

für $0{,}9 \leq x \leq 1$.

Der Minimalansatz der potentiellen Energie gibt, wenn für $q(x) = q_1(x) + q_2(x)$ die betreffenden Werte eingesetzt werden und nur über die Strecken integriert wird, wo diese nicht gleich null sind:

$$\int_0^{0{,}9} a^2 (0{,}5\,x^2 - 0{,}495)^2\,d x + \int_{0{,}9}^{1} a^2 (0{,}9\,x - 0{,}9)^2\,d x$$

$$-2 \int_0^{0{,}9} a\,(0{,}0416\,..\,x^4 - 0{,}2475\,x^2 + 0{,}2058375)\,d x$$

$$-2 \int_{0{,}9-\varepsilon}^{0{,}9} \frac{-1{,}2}{\varepsilon} \cdot a\,(0{,}0416\,..\,x^4$$

$$-0{,}2475\,x^2 + 0{,}2058375)\,d x = \text{Min}\,.$$

Das letzte Integral erstreckt sich über die Länge ε, der Klammerausdruck gibt an der Stelle $x = 0{,}9$ den Wert 0,0327. Das Integral gibt:

$$\varepsilon \cdot \frac{-1{,}2}{\varepsilon} \cdot a \cdot 0{,}0327 = -a \cdot 0{,}03924\,.$$

Aus dem Minimalansatze folgt hiermit:

$$a^2 \cdot 0{,}130032 - 2\,a \cdot 0{,}130032 + 2\,a \cdot 0{,}03824 = \text{Min.}$$

Das günstigste a_{opt} erhält man durch Differentiation nach a:

$$a_{\text{opt}} = 1 - \frac{0{,}03924}{0{,}130032} = 1 - 0{,}27935.$$

Mit diesem Werte wird die Durchbiegung in der Mitte:

$$f_m(0) = 0{,}2058385 - 0{,}062116 = 0{,}143721\,.$$

Dieser Wert ist etwa 2 % kleiner als der genaue Wert.

Der zweite Minimalansatz gibt mit derselben Näherungsfunktion für die Durchbiegung

$$\int_0^{0{,}9} a^2\,d x - 2 \int_0^{0{,}9} a\,q(x)\,d x + \int_0^{1} q^2(x)\,d x = \text{Min}\,.$$

Das dritte Integral hat auf die Bestimmung von a_{opt} keinen Einfluß; das Integral $\int_0^{0{,}9} a\,q(x)\,d x$ gibt den Wert $a\,(0{,}9 - 1{,}2) = -0{,}3\,a$.

Hiermit erhält man:

$$0{,}9\,a^2 + 0{,}6\,a = \text{Min}$$

und durch Differentiation

$$a_{\text{opt}} = -0{,}3\ldots$$

Die Durchbiegung nach dieser Nährungsmethode nimmt überall negative Werte statt positiver an.

Um diese sonderbaren Ergebnisse zu erklären, formen wir die Gl. (2) und (3) um.

Gl. (2) gibt, wenn wir darin auf Grund zweimaliger partieller Integration

$$\int 2\,q(x)\,f(x)\,d x = \int 2\,\frac{d^2 y}{d x^2} \cdot \frac{d^2 f(x)}{d x^2}\,d x$$

setzen und das für das Minimum belanglose Glied $\int \left(\frac{d^2 y}{d x^2}\right)^2 d x$ hinzufügen:

$$\int_0^1 \left[\frac{d^2 f(x)}{d x^2} - \frac{d^2 y}{d x^2}\right]^2 d x = \text{Min} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2\,\text{a}).$$

Gl. (3) hingegen gibt mit $q(x) = \frac{d^4 y}{d x^4}$:

$$\int_0^1 \left[\frac{d^4 f(x)}{d x^4} - \frac{d^4 y}{d x^4}\right]^2 d x = \text{Min} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3\,\text{a}).$$

Im ersten Falle wird durch a_{opt} das Fehlerintegral der zweiten Ableitung, im zweiten Falle das Fehlerintegral der vierten Ableitung zum Minimum gemacht. Am günstigsten wäre ein Minimalansatz, bei dem das Fehlerintegral der Funktion selbst zum Minimum gemacht wird, wenn man sich für die Funktionswerte interessiert. Je höhere Ableitungen man annähert, desto größere Abweichungen werden im allgemeinen für die Funktionswerte eintreten.

Es lassen sich auch Beispiele konstruieren, bei denen der Minimalansatz der potentiellen Energie ganz falsche Näherungswerte für y gibt.

Bei Benutzung der Minimalansätze ist darum stets Vorsicht geboten. Nur der Ausdruck, der selbst zum Minimum gemacht wird, wird bei günstigen Näherungsansätzen gut angenähert.

Dresden. C. Weber. 265

Neuer Beweis des Entwicklungssatzes der Vektoralgebra.

1. A. Föppl (in seiner „Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität", Leipzig 1894), und nach ihm viele andere, haben den Entwicklungssatz der Vektorrechnung bewiesen, indem sie auf die Zerlegung nach Komponenten eines rechtwinkligen Dreibeins zurückgriffen. Diesem mehr rechnerischen Verfahren hat Lagally M. in seiner ausgezeichneten Darstellung der Vektorrechnung (Vorlesungen über Vektorrechnung, Leipzig 1934) einen anderen anschaulicheren Beweis entgegengestellt, der indessen doch, wie sein Verfasser selbst bemerkt, auch nicht kürzer ist. Im folgenden gebe ich die Herleitung des Satzes in einer neuen Form, die wohl allen billigen Ansprüchen an Einfachheit und Anschaulichkeit entsprechen dürfte.

2. In dem Entwicklungssatz: $\mathfrak{C} \times (\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) = (\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C})\,\mathfrak{A} - (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C})\,\mathfrak{B}$ ist nämlich ein ebenso einfacher wie schöner Umklappungssatz der ebenen Geometrie enthalten, der allerdings gar nicht oder nur wenig bekannt sein dürfte und dessen Beweis ich daher voranstelle, wobei ich mich auf Bild 1 beziehe.

Von C sind auf die Geraden MM' und NN' die Lote CA und CB gefällt. Über OC als Durchmesser ist der Kreis durch A und B gelegt. Das Dreieck AOB ist um die Winkelhalbierende des Winkels AOB umgeklappt. In dem umgeklappten Dreieck $A'OB'$ steht nun — und das ist der Inhalt des Umklappungssatzes — $A'B'$ zu OC senkrecht.

Zum Beweis beachte man, daß (wegen der Umklappung und wegen des Umfangswinkelsatzes):

XUM

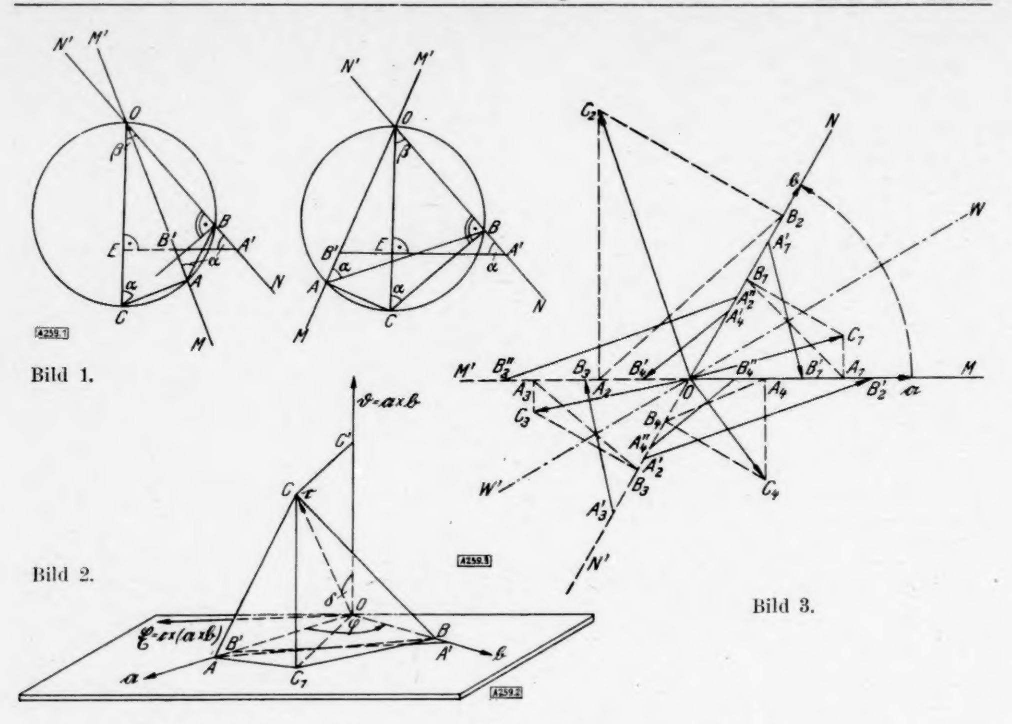


Bild 1.

Bild 2.

Bild 3.

$$\sphericalangle OA'B' = \sphericalangle OAB = \sphericalangle OCB = \alpha$$

ist, so daß das bei B rechtwinklige Dreieck OBC mit Dreieck OEA' in den Winkeln übereinstimmt, weshalb $\sphericalangle OEA' = 90^0$ ist und $A'B'$ zu OC senkrecht steht.

3. Da nun die Formeln: $\mathfrak{C} \times (\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) = (\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C})\,\mathfrak{A} - (\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{C})\,\mathfrak{B}$, in allgemeinen Vektoren, und $\mathfrak{c} \times (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = (\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})\,\mathfrak{a} - (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c})\,\mathfrak{b}$, in Einheitsvektoren, durch Division oder durch Multiplikation mit ABC (dem Produkte der Beträge der drei Vektoren) in einander überführbar sind, genügt es, die Formel für Einheitsvektoren herzuleiten.

Wir setzen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ (Bild 2) bei O zu einem Dreibein zusammen und errichten dann, senkrecht zur Ebene von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, den Vektor $\vartheta = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$, sowie, zur Ebene von $\mathfrak{c}$ und ϑ senkrecht, den Vektor $\mathfrak{C} = \mathfrak{c} \times (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$, der in die Ebene von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ fällt. Es gilt dann, unter φ den Winkel von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$, unter δ aber den von $\mathfrak{c}$ nach ϑ verstanden:

$$|\vartheta| = |\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}| = |\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{b}| \sin\varphi = \sin\varphi,$$

und

$$|\mathfrak{C}| = |\mathfrak{c} \times \vartheta| = |\mathfrak{c}|\,|\vartheta| \sin\delta = \sin\varphi \sin\delta.$$

4. Wie können wir $\mathfrak{C}$ konstruieren?

Wir fällen von C, dem Endpunkte von $\mathfrak{c}$, folgende Lote: CC_1 auf die Ebene von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$; CC' auf ϑ; CA auf $\mathfrak{a}$ und schließlich CB auf $\mathfrak{b}$. Dadurch erhalten wir C_1A senkrecht zu $\mathfrak{a}$ und C_1B senkrecht zu $\mathfrak{b}$. Nun klappen wir noch Dreieck OAB um die Halbierende des Winkels φ um. Im umgeklappten Dreieck $OA'B'$ ist $A'B'$, als Vektor, gleich $\mathfrak{C} = \mathfrak{c} \times (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$; denn erstens ist $A'B'$ (im richtigen Sinne) zur Ebene von $\mathfrak{c}$ und ϑ senkrecht, wie man mittels des Umklappungssatzes erkennt; zweitens ist auch dem Betrage nach $A'B' = |\mathfrak{C}| = \sin\varphi \sin\delta$; denn es ist:

$$OC_1 = CC' = OC \sin\delta = \sin\delta.$$

Da aber OC_1 Durchmesser des um OAC_1B beschreibbaren Kreises ist, besitzt die $A'B'$ gleiche, φ gegenüberliegende Sehne AB die Länge $\sin\delta \sin\varphi = |\mathfrak{C}|$.

Andererseits ist, weil die Projektion eines Einheitsvektors auf einen anderen durch ihr Punktprodukt dargestellt wird:

$$OB = OB' = (\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}),$$
$$OA = OA' = (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c}).$$

Daher ist: Vektor $OA' = OA\,\mathfrak{b} = (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c})\,\mathfrak{b}$ und Vektor $OB' = OB\,\mathfrak{a} = (\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})\,\mathfrak{a}$, so daß wir finden:

$$\overrightarrow{A'B'} = \mathfrak{C} = \mathfrak{c} \times (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})$$
$$= \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = (\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})\,\mathfrak{a} - (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c})\,\mathfrak{b}.$$

5. Sollte C_1 etwa nicht in den Winkel φ oder in dessen Scheitelwinkel fallen, so zieht man zum Beweise noch die zu $A'B'$ in bezug auf O spiegelige $A''B''$ zu Hilfe, die man an Stelle von $A'B'$ erhält, wenn man Dreieck AOB um die Halbierende der Nebenwinkel von φ umklappt. Diese Strecke $A''B''$ ist $A'B'$ entgegengesetzt gleich und stellt $-\mathfrak{C}$ vor. An Bild 3 läßt sich das nachprüfen.

Aschaffenburg. O. Hofmann. 259.

Linearverbindung kompressibler ebener Strömungsfelder. Die Potentialgleichung der stationären ebenen kompressiblen Strömung ist nichtlinear. Man kann sie jedoch durch Übergang zum Geschwindigkeitsbild linearisieren [1]) und hat auf dieser Grundlage verschiedene Integrationsmethoden zur Ermittlung kompressibler Strömungsfelder entwickelt [2]). Im folgenden wird auf ein sich

[1]) Vgl. A. Busemann: Z. angew. Math. Mech. Bd. 17 (1937), S. 73 bis 79 und die dort angegebenen früheren Arbeiten von P. Molenbroek, A. Tschapligin, D. Riabouchinski und B. Demtschenko.

[2]) A. Busemann: a. a. O.; C. Ferrari: Aerotecnica Band 18 (1938), S. 400 bis 411; Hsue-Shen-Tsien: J. Aeronaut. Sciences Bd. 6 (1939) S. 399 bis 407; F. Ringleb: Z. angew. Math. Mech. Bd. 20 (1940) S. 185 bis 198.

unmittelbar aus der Linearisierung ergebendes geometrisches Verfahren hingewiesen, welches aus zwei bekannten Strömungsfeldern eine 1-parametrige Menge „linearverbundener“ neuer Strömungsfelder zu konstruieren gestattet. Das Verfahren wird zur Herleitung eines neuen Beispiels eines Strömungsfeldes mit Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit [3]) [4]) [5]) benützt.

1. Linearisierung der Potentialgleichung.

Wir schreiben die Potentialgleichung der stationären ebenen kompressiblen Strömung in der Form

$$\varphi_{xx}\left(1-\frac{\varphi_x^2}{c^2}\right)+\varphi_{yy}\left(1-\frac{\varphi_y^2}{c^2}\right)-\frac{2}{c^2}\varphi_{xy}\varphi_x\varphi_y=0 \quad (1).$$

Hierbei bedeuten die unteren Zeiger partielle Differentiationen und die Schallgeschwindigkeit c ist eine Funktion von $\varphi_x^2+\varphi_y^2$; diese Funktion ist durch die Adiabatengleichung $p=p\,(\varrho)$ festgelegt und lautet beispielsweise für vollkommene Gase

$$c^2=k\,p_0/\varrho_0-\frac{k-1}{2}(\varphi_x^2+\varphi_y^2) \quad . \quad (2)$$

($k=$ Verhältnis der spezifischen Wärmen, $p_0=$ Ruhedruck, $\varrho_0=$ Ruhedichte).

Der Übergang von der Strömungsebene (x, y-Ebene) in die Ebene des Geschwindigkeitsbildes (u, v-Ebene) erfolgt am einfachsten mittels der Legendre-Transformation

$$\left.\begin{aligned} u&=\varphi_x, & v&=\varphi_y, & \Phi&=u\,x+v\,y-\varphi;\\ x&=\Phi_u, & y&=\Phi_v, & \varphi&=u\,\Phi_u+v\,\Phi_v-\Phi \end{aligned}\right\} \quad (3).$$

Sie verwandelt die nichtlineare Potentialgleichung (1) in die lineare Differentialgleichung [1])

$$\Phi_{uu}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+\Phi_{vv}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)+\frac{2}{c^2}\Phi_{uv}\,u\,v=0 \quad (4),$$

wobei jetzt c eine Funktion von u^2+v^2 ist.

2. Konstruktion linearverbundener Strömungsfelder.

Wegen der Linearität der Gleichung (4) lassen sich ihre Lösungen linear überlagern, d. h. mit Φ_1 und Φ_2 ist auch

$$\Phi=\lambda_1\,\Phi_1+\lambda_2\,\Phi_2 \qquad (\lambda_1, \lambda_2=\text{const}) \quad . \quad . \quad (5)$$

ein Integral von (4). Aus (3) und (5) kommt

$$\left.\begin{aligned} x&=\lambda_1\,x_1(u,v)+\lambda_2\,x_2(u,v),\\ y&=\lambda_1\,y_1(u,v)+\lambda_2\,y_2(u,v);\\ \varphi&=\lambda_1\,\varphi_1(u,v)+\lambda_2\,\varphi_2(u,v) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (6)$$

und man hat somit folgende Konstruktionsvorschrift (Bild 1, 3):

2 kompressible Strömungsbereiche mit derselben Adiabatengleichung $p=p\,(\varrho)$ seien punktweise einander zugeordnet, derart, daß in entsprechenden Punkten P_1, P_2 die Geschwindigkeitsvektoren $\mathfrak{w}$ nach Größe und Richtung übereinstimmen. Es ergibt sich ein neuer kompressibler Strömungsbereich mit derselben Adiabatengleichung, wenn man alle Verbindungsstrecken $P_1 P_2$ in einem festen Verhältnis λ ($\lambda=$ beliebiger Parameter) innen oder außen teilt und jedem Teilpunkt P wieder den Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{w}$ zuweist. Die 3 Strömungsfelder der Punkte P_1, P_2, P bezeichnen wir als „linearverbunden“.

In linearverbundenen Strömungsfeldern entsprechen sich:

a) die Isotachen und Isoklinen, d. h. die Kurven konstanten Betrags bzw. konstanter Richtung des Geschwindigkeitsvektors;

b) die Unterschall- und Überschallbereiche und die etwaigen Durchgangslinien durch die Schallgeschwindigkeit;

c) die Machschen Netze der Überschallbereiche. Die Machschen Kurven sind hierbei parallelbezogen, d. h. sie haben in entsprechenden Punkten parallele Tangenten. Die Machschen Netze sind reziprok zu einem gemeinsamen charakteristischen Netz im Geschwindigkeitsbild in ähnlicher Weise, wie verschiedene Lagepläne demselben reziproken Kräfteplan zugeordnet sein können.

Die Stromlinien und die Potentiallinien entsprechen sich bei der punktweisen Zuordnung linearverbundener Strömungsfelder im allgemeinen nicht. Die Potentialwerte sind gemäß (6) linear kombiniert.

Kompressible Strömungsfelder können im Überschallbereich „Grenzlinien“ haben, auf die erstmals W. Tollmien[3]) hingewiesen hat und die neuerdings unter dem Namen „Stoßlinien“ von F. Ringleb[4]) untersucht wurden. An diesen Grenzlinien flanscht das Strömungsfeld von einem Blatt auf ein anderes Blatt der doppelt überdeckt zu denkenden Ebene über. Bei der Linearverbindung von Strömungsfeldern durch Zuordnung von Punkten mit gleichem Geschwindigkeitsvektor entsprechen die Grenzlinien einander i. a. nicht, sondern einer Grenzlinie, an der beispielsweise 2 Blätter des P_1-Feldes zusammenhängen, ist im P_2- und im P-Feld eine Kurve zugeordnet, deren beiderseitige Umgebungen zum gleichen Blatt gehören.

Wenn sich die kompressible Strömung mit $\varrho=$ const (Machsche Zahl $M=0$) zur inkompressiblen Strömung spezialisiert, werden die Isotachen-Isoklinen-Netze isotherm und die Zuordnung durch Linearverbindung geht in eine konforme Abbildung über.

3. Beispiele.

Wir benützen die Linearverbindung zur Konstruktion von Strömungsfeldern mit Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit. Dabei legen wir die Adiabatengleichung der idealen Gase zugrunde und bezeichnen den Geschwindigkeitsbetrag mit w. Dann ist nach (2) die Schallgeschwindigkeit des ruhenden Gases $c_0=\sqrt{k\,p_0/\varrho_0}$ und der bei Expansion ins Vakuum eintretende Höchstwert der Strömungsgeschwindigkeit

$$w_{\max}=c_0\sqrt{\frac{2}{k-1}} \quad \text{bzw.} \quad W_{\max}=\sqrt{\frac{2}{k-1}} \quad (7),$$

wenn wir zur Abkürzung $W=w/c_0$ setzen. Dem Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit entspricht

$$w^*=c_0\sqrt{\frac{2}{k+1}} \quad \text{bzw.} \quad W^*=\sqrt{\frac{2}{k+1}} \quad . \quad (8).$$

a) Linearverbindung von Quellströmung und Wirbelströmung.

Die kompressible Quellströmung ergibt sich durch Integration von

$$\operatorname{div}(\varrho\,w)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,r}(\varrho\,w)+\frac{\varrho\,w}{r}=0;$$

Radiusvektor r und Geschwindigkeitsbetrag w bzw. W sind verknüpft durch die Beziehung

$$r=r_{\min}\sqrt{\frac{2}{k+1}}\,W^{-1}\cdot\left(\frac{1-\dfrac{k-1}{k+1}}{1-\dfrac{k-1}{2}W^2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (9),$$

[3]) W. Tollmien: Z. angew. Math. Mech. Bd. 17 (1937) S. 117 bis 136.

[4]) F. Ringleb: a. a. O. und Deutsche Mathematik Bd. 5 (1941) S. 377 bis 384.

[5]) H. Görtler: Z. angew. Math. Mech. Bd. 19 (1939) S. 325 bis 337 und Bd. 20 (1940) S. 254 bis 262.

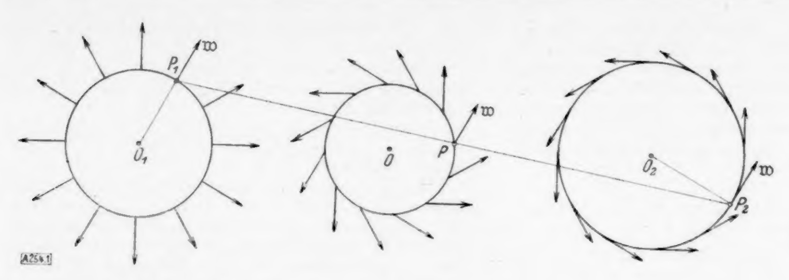


Bild 1. Linearverbindung von Quelle und Wirbel.

wobei der kleinste Radiusvektor $r_{\min}$ beliebig gewählt werden kann. Der Kreis $r = r_{\min}$, dem $W = W^* = \sqrt{\frac{2}{k+1}}$ entspricht, ist sowohl Grenzlinie als auch Durchgangslinie vom Unterschall zum Überschall; der Außenbereich $r > r_{\min}$ ist doppelt überdeckt, und zwar hat man im Unterschall $0 < W < W^* = \sqrt{\frac{2}{k+1}}$ und im Überschall $\sqrt{\frac{2}{k+1}} = W^* < W < W_{\max} = \sqrt{\frac{2}{k-1}}$. In das Kreisinnere $r < r_{\min}$ läßt sich die kompressible Quellströmung nicht fortsetzen.

Für die kompressible Wirbelströmung folgt aus

$$|\operatorname{rot} \mathfrak{w}| = \frac{1}{r} \left| \frac{\mathrm{d}(r\,w)}{\mathrm{d}\,r} \right| = 0$$

die Beziehung

$$r = r_{\min} \sqrt{\frac{2}{k-1}}\, W^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

mit dem wieder beliebigen kleinsten Radiusvektor $r_{\min}$. Für $W = W^* = \sqrt{\frac{2}{k+1}}$ erhält man den Kreis $r^* = r_{\min} \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$ als Durchgangslinie vom Unterschallbereich $r > r^*$ zum Überschallbereich $r^* > r > r_{\min}$. Ebenso wie die Quellströmung läßt sich auch die kompressible Wirbelströmung nicht in das Kreisinnere $r < r_{\min}$ fortsetzen.

Die Isotachen sowohl der Quellströmung als auch der Wirbelströmung sind die konzentrischen Kreise $r = \text{const}$. Bei der Linearverbindung einer Quell- und Wirbelströmung werden je 2 Isotachen-Kreise (9) und (10) mit gleichem W einander zugeordnet, wobei die entsprechenden Radienvektoren zueinander senkrecht stehen (Bild 1). Die von den Teilpunkten P erzeugten Isotachen sind wieder Kreise und man erhält als Ergebnis der Linearverbindung die „Wirbelquellströmung", wie sie bereits von G. J. Taylor[6]) angegeben wurde. Auch bei der Wirbelquelle kann die Strömung ins Innere eines Kreises $r = r_{\min}$ nicht fortgesetzt werden. Dieser Kreis ist hier jedoch lediglich Grenzlinie und liegt innerhalb des Kreises $r = r^*$, an dem die Strömung vom Unterschall zum Überschall übergeht.

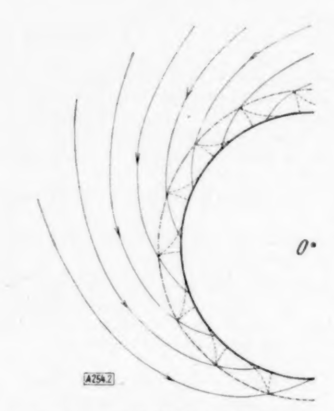


Bild 2. Stromlinien der Linearverbindung von Quelle und Wirbel.

In Bild 2 ist ein Ausschnitt einer durch Linearverbindung von Wirbel und Quelle entstandenen

[6]) G. J. Taylor: Z. angew. Math. Mech. Bd. 10 (1930) S. 341

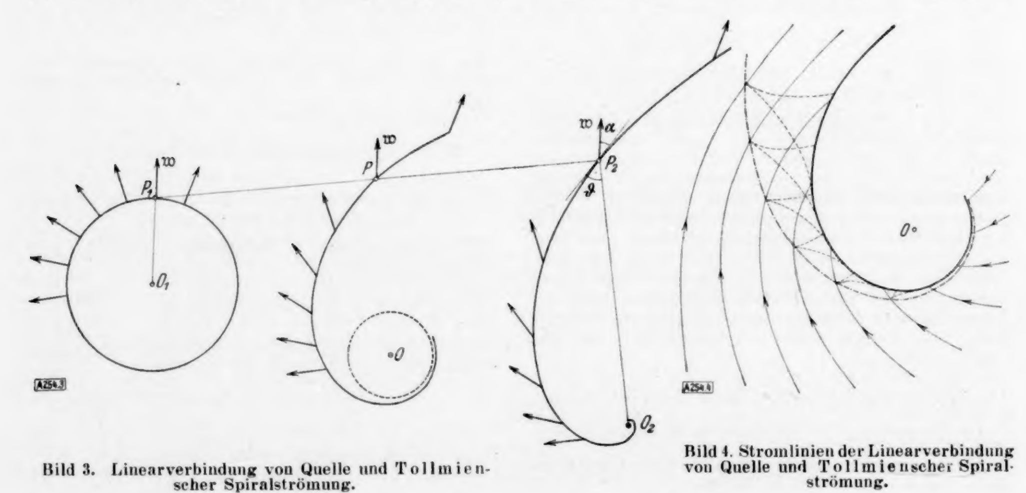


Bild 3. Linearverbindung von Quelle und Tollmienscher Spiralströmung.

Bild 4. Stromlinien der Linearverbindung von Quelle und Tollmienscher Spiralströmung.

Wirbelquellströmung dargestellt. Die mit Pfeilen gekennzeichneten, durch Drehung um O auseinander hervorgehenden spiralenförmigen Kurven sind Stromlinien; die Pfeilrichtung weist vom Unterschall zum Überschall. Die Grenzlinie (Kreis $r = r_{\min}$) ist stark ausgezogen, die Durchgangslinie vom Unter- zum Überschall (Kreis $r = r^*$) ist strichpunktiert. Die im ringförmigen Überschallbereich verlaufenden gestrichelten Kurven sind Machsche Linien. Sie beginnen an der Durchgangslinie $r = r^*$ senkrecht zu den Stromlinien mit Rückkehrpunkten und berühren die Grenzlinie $r = r_{\min}$.

b) Linearverbindung von Quellströmung und Tollmienscher Spiralströmung.

Die Tollmiensche Spiralströmung [3]) hat die konzentrischen, durch Drehung auseinander hervorgehenden logarithmischen Spiralen

$$\eta = \ln r + a\,\omega = \text{const} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

(r, ω = Polarkoordinaten, $a = \operatorname{tg}\vartheta$ = konstante Neigung der Spiralen gegen die Radienvektoren) als Isotachen. Längs jeder Spirale η = const ist nicht nur der Betrag W der Geschwindigkeit, sondern auch der Neigungswinkel α des Geschwindigkeitsvektors gegen die Spirale konstant. W und α sind daher Funktionen der Veränderlichen η; vgl. hierzu W. Tollmien [3]).

Bei der Linearverbindung einer Quellströmung mit einer Spiralströmung wird je ein Isotachenkreis (9) und eine Isotachenspirale (11) einander zugeordnet, wobei entsprechende Radienvektoren den konstanten Winkel $\vartheta - \alpha$ miteinander einschließen (Bild 3). Die von den Teilpunkten P erzeugten Isotachen sind spiralenförmige Kurven, welche in unendlich vielen Windungen einen Kreis (— in Bild 3 punktiert —) asymptotisch umschlingen. Das durch Linearverbindung sich ergebende Strömungsfeld stellt ein neues Beispiel einer kompressiblen Strömung mit Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit dar; während in den bekannten Beispielen der Quellströmung, Wirbelströmung, Wirbelquellströmung und Tollmienschen Spiralströmung die Isotachen stets von den Stromlinien unter konstanten Winkeln durchsetzt werden, sind bei dem neuen Beispiel die Isotachen nicht Isogonaltrajektorien der Stromlinien.

In Bild 4 ist ein Ausschnitt der durch Linearverbindung von Quell- und Spiralströmung gewonnenen neuen Strömung dargestellt, wobei die Bezeichnungen dieselben sind wie im analogen Bild 2.

Aachen. R. Sauer. 254

Funktionsgewichte in der Ausgleichsrechnung.

Kurze Inhaltsangabe:

Bei der Errechnung irgendwelcher Zustandsgrößen eines Vorganges aus den zugehörigen Meßwerten läßt sich eine Genauigkeitssteigerung dadurch erzielen, daß man mehr Meßgeräte ansetzt, als es zur einmaligen Bestimmung der betr. Zustandsgröße erforderlich ist. Es werden Methoden entwickelt zur Errechnung eines Mittelwertes unter Berücksichtigung aller Einzelmessungen und zur Abschätzung seiner Genauigkeit.

Aufgabenstellung.

Zur Bestimmung eines (z. B. zeitlich veränderlichen) Funktionswertes x seien im gleichen Zeitpunkt n Größen $a_1, a_2, \ldots a_n$ gemessen. Es sei weiterhin angenommen, daß der Funktionswert schon durch $n-1$ dieser Meßgrößen vollkommen bestimmt ist. Durch Auswahl von je $n-1$ dieser n Argumente a_ν erhält man jeweils einen Funktionsausdruck

$$x_\varkappa = f^{(\varkappa)}(a_1, a_2, \ldots a_{\varkappa-1}, a_{\varkappa+1}, \ldots a_n),$$
$$\varkappa = 1, 2, \ldots n.$$

Es gibt n Funktionen $x_\varkappa$. Wären nun die Argumente fehlerlos, so würden alle Werte $x_\varkappa$ übereinstimmen; da aber die a_ν mit Meßfehlern behaftet sind, werden sich im allgemeinen auch n verschiedene Werte $x_\varkappa$ ergeben. Um aus diesen den wahrscheinlichsten Wert $\bar{x}$ zu ermitteln, sind die einzelnen $x_\varkappa$ derart mit Gewichten zu belegen, daß die zuverlässigsten Funktionswerte den größten Einfluß auf die Mittelwertbildung $\bar{x}$ haben.

Definition der Funktionsgewichte.

Die mittleren quadratischen Fehler der einzelnen Meßgrößen a_ν seien mit $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ bezeichnet, der mittlere quadratische Fehler der Funktion $x_\varkappa$ sei $M_\varkappa$.

Das Einzelgewicht eines Meßwertes a_ν aus einer Reihe gleichartiger (aber im Allgemeinfall nicht gleichwertiger) Messungen kann, wie in der Ausgleichsrechnung gezeigt wird[1]), dem irgendwie festzustellenden Quadrat des Einzelfehlers umgekehrt proportional gesetzt werden. Man kann also schreiben

$$g_\nu = \frac{k^2}{\mu_\nu^2} \qquad (k = \text{const.}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

$$G_\varkappa = \frac{k^2}{M_\varkappa^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

wobei g_ν das Gewicht der Meßgröße a_ν, $G_\varkappa$ das Gewicht des Funktionswertes $x_\varkappa$ darstellt. Der wahrscheinlichste Funktionswert $\bar{x}$ ist dann

$$\bar{x} = \frac{G_1 x_1 + G_2 x_2 + \ldots + G_n x_n}{G_1 + G_2 + \ldots + G_n} \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Die Beziehung zwischen $G_\varkappa$ und g_ν wird durch das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz hergestellt. Es gilt

$$M_\varkappa^2 = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial x_\varkappa}{\partial a_\nu} \cdot \mu_\nu\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4);$$

und aus (1) (2) (4) folgt

$$G_\varkappa = \frac{1}{\sum_\nu \left(\frac{\partial x_\varkappa}{\partial a_\nu}\right)^2 \cdot \frac{1}{g_\nu}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Die in diesen Formeln auftretenden Argumentgewichte g_ν (gegenüber den Funktionsgewichten $G_\varkappa$) sind von den Meßfehlern der einzelnen Argumente a_ν abhängig, gestatten also, z. B. die Meßgenauigkeit eines Instrumentes zu berücksichtigen. Die Argumentgewichte g_ν werden hier als von vornherein gegeben angenommen.

Berechnung der Ableitungen.

Für die Bestimmung der Funktionsgewichte nach (5) werden sämtliche Ableitungen aller Funktionswerte $x_\varkappa = f^{(\varkappa)}(\ldots)$ benötigt. Die Berechnung dieser Ableitungen kann nun z. B. durch Differentiation der einzeln aufgestellten Funktionsausdrücke geschehen; im folgenden soll ein Verfahren angegeben werden, das in der Praxis die Bildung der Ableitungen oft wesentlich erleichtert.

[1]) Hütte Bd. 1, 26. Aufl., S. 1056. — F. Kohlrausch: Praktische Physik. Lpz., 1935, 17. Aufl., S. 21. — Helmert: Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 1907, 2. Aufl. S. 82.

Dabei wird nicht mehr von sämtlichen Einzelfunktionen x ausgegangen, sondern es wird nur eine von ihnen, etwa die am einfachsten gebaute, zur Bildung der Ableitungen herangezogen. Dies sei die Funktion

$$x_1 = f(a_2, a_3, \ldots a_n) \quad \ldots \ldots \ldots (6).$$

(Bei Benutzung nur einer Grundfunktion ist der Index am Funktionszeichen f fortgelassen.) Zwischen den Argumentwerten $a_1, a_2, \ldots a_n$ besteht nun eine Bedingungsgleichung

$$F(a_1, a_2, \ldots a_n) = 0 \quad \ldots \ldots (7).$$

Eine solche folgt z. B. aus der Gleichsetzung verschiedener Funktionswerte $x_\varkappa$ oder auch aus geometrischen Beziehungen. Aus der Bedingungsgleichung (7) und der Ausgangsfunktion (6) ergeben sich umgekehrt alle Funktionswerte $x_\varkappa$. Daher müssen sich auch die Ableitungen sämtlicher Funktionswerte aus dieser einen Ausgangsfunktion und der Bedingungsgleichung folgern lassen. Aus Gleichung (7), die ja alle Größen a_ν enthält, läßt sich jedes a_ν als Funktion der übrigen Argumentwerte errechnen. Es sei nach (7) insbesondere

$$a_\varkappa = \varphi(a_1, a_2, \ldots a_{\varkappa-1}, a_{\varkappa+1}, \ldots a_n).$$

Setzt man diesen Ausdruck in (6) ein, so erhält man eine Funktion, die nicht mehr von $a_\varkappa$ abhängt, also den Funktionswert $x_\varkappa$. Es ist somit

$$x_\varkappa = f(a_2, a_3, \ldots a_{\varkappa-1}, \varphi(a_1, a_2, \ldots \ldots a_{\varkappa-1}, a_{\varkappa+1}, \ldots a_n), a_{\varkappa+1}, \ldots a_n),$$

und für die Ableitungen von $x_\varkappa$ nach a_ν erhält man

$$\frac{\partial x_\varkappa}{\partial a_\nu} = \frac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial a_\varkappa}} \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial a_\nu} & \dfrac{\partial f}{\partial a_\varkappa} \\ \dfrac{\partial F}{\partial a_\nu} & \dfrac{\partial F}{\partial a_\varkappa} \end{vmatrix} \quad \ldots \ldots \ldots (8).$$

M i t t l e r e r F e h l e r d e s M i t t e l w e r t e s.

Entscheidend ist nun zu wissen, wie genau der nach (3) (5) (8) gefundene Mittelwert bestimmt ist. Es ist also der mittlere Fehler des Mittelwertes $\bar{x}$ festzustellen. Das Gewicht des Mittelwertes $\bar{x}$ ist $G_1 + G_2 + \ldots + G_n$; für den m i t t l e r e n F e h l e r M_0 d e s M i t t e l w e r t e s gilt also entsprechend (2)

$$M_0^2 = \frac{k^2}{G_1 + G_2 + \ldots + G_n},$$

in Verbindung mit (2) folglich

$$M_0 = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{M_1^2} + \dfrac{1}{M_2^2} + \ldots + \dfrac{1}{M_n^2}}} \quad \ldots (9).$$

Für die Praxis ist es wichtig, den mittleren Fehler des Mittelwertes möglichst herabzudrücken. Dies erreicht man nach (9) durch Vergrößerung der Anzahl der zur Berechnung herangezogenen Werte. Bei Langbasis-Luftaufnahmen mit Kinotheodoliten, wofür dieses Verfahren entwickelt wurde, ist diese Genauigkeitssteigerung besonders bemerkenswert, da hierbei ja eine Erhöhung der Genauigkeit durch mehrfach w i e d e r h o l t e Messungen nicht möglich ist. Bei Hinzunahme eines dritten Basispunktes für die Vermessung eines Luftzieles lassen sich — wie man leicht nachrechnen kann — zur Berechnung des Mittelwertes der Höhe des Luftzieles sogar 19 Funktionswerte heranziehen.

E r w e i t e r u n g.

Sind die Funktionswerte x durch weniger als $n-1$ Größen, etwa durch $n-m$ Größen a_ν bestimmt, so lassen sich aus den n Meßwerten a_ν je nach der Art der Aufgabe bis zu $\binom{n}{m}$ verschiedene Funktionswerte errechnen. Die Funktionswerte seien auch in diesem Falle stets mit den Indizes der n i c h t in der betreffenden Funktion vorkommenden Meßgrößen a_ν gekennzeichnet; also z. B. für $n = 7$ und $m = 3$

$$x_{236} = f^{(236)}(a_1, a_4, a_5, a_7).$$

Die Beziehung (5) geht dann über in

$$G_{\varkappa\lambda\ldots\sigma} = \frac{1}{\sum\limits_\nu \left(\dfrac{\partial x_{\varkappa\lambda\ldots\sigma}}{\partial a_\nu}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{g_\nu}} \quad \ldots \ldots (5^*).$$

Die Ableitungen errechnen sich bei einer Ausgangsfunktion

$$x_{123\ldots m} = f(a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots a_n) \quad \ldots (6^*)$$

und m Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{array}{l} F^{(1)}(a_1, a_2, \ldots a_n) = 0 \\ F^{(2)}(a_1, a_2, \ldots a_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F^{(m)}(a_1, a_2, \ldots a_n) = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots (7^*),$$

wie durch H. M o l i t z bewiesen wurde, nach

$$\frac{\partial x_{\varkappa\lambda\ldots\sigma}}{\partial a_\nu} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial a_\nu} & \dfrac{\partial f}{\partial a_\varkappa} & \dfrac{\partial f}{\partial a_\lambda} & \ldots & \dfrac{\partial f}{\partial a_\sigma} \\ \dfrac{\partial F^{(1)}}{\partial a_\nu} & \dfrac{\partial F^{(1)}}{\partial a_\varkappa} & \dfrac{\partial F^{(1)}}{\partial a_\lambda} & & \dfrac{\partial F^{(1)}}{\partial a_\sigma} \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ \dfrac{\partial F^{(m)}}{\partial a_\nu} & \dfrac{\partial F^{(m)}}{\partial a_\varkappa} & \dfrac{\partial F^{(m)}}{\partial a_\lambda} & & \dfrac{\partial F^{(m)}}{\partial a_\sigma} \end{vmatrix} \quad (8^*),$$

worin Δ die Hauptunterdeterminante der großen Determinante ist, also der Faktor von $\dfrac{\partial f}{\partial a_\nu}$. Der wahrscheinlichste Funktionswert ist jetzt

$$\bar{x} = \frac{\sum G_{\varkappa\lambda\ldots\sigma} \cdot x_{\varkappa\lambda\ldots\sigma}}{\sum G_{\varkappa\lambda\ldots\sigma}} \pm \frac{k}{\sqrt{\sum G_{\varkappa\lambda\ldots\sigma}}} \quad (3^*).$$

E r g e b n i s.

Als Ergebnis der Untersuchungen wird festgestellt: Falls Überbestimmung eines Funktionswertes durch e i n e Bedingungsgleichung vorliegt, ist sein wahrscheinlichster Wert gegeben durch

$$\bar{x} = \frac{G_1 x_1 + G_2 x_2 + \ldots + G_n x_n}{G_1 + G_2 + \ldots + G_n} \pm \frac{1}{\sqrt{G_1 + G_2 + \ldots + G_n}}$$

mit $G_\varkappa$ = Gewicht des Funktionswertes $x_\varkappa$ aus (5) und (8), wobei g_ν das durch die Beziehung $g_\nu = \dfrac{1}{\mu_\nu^2}$ definierte Gewicht des ν-ten Meßwertes darstellt und μ_ν als mittlere Abweichung der Meßgröße a_ν gegeben ist. Im Allgemeinfall gelten entsprechend die Beziehungen (3*) mit $k = 1$, (5*) und (8*).

Berlin. H. K n o b l o c h. 239

BUCHBESPRECHUNGEN

Festschrift der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg zu ihrem 250jährigen Bestehen 1940. Erster Teil: Geschichte der Gesellschaft von 1890 bis 1940. (Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg, Bd. VIII, Teil 1.) 73 S. Hamburg 1940.

Dgl. Zweiter Teil: Abhandlungen (Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg, Bd. VIII, Teil 2.) 239 S. Hamburg 1940.

Der erste Teil der Festschrift enthält eine Geschichte dieser allein schon durch ihr Alter bemerkenswerten Mathematischen Gesellschaft über den Zeitraum von 1890 bis 1940. Der zweite Teil enthält fachwissenschaftliche Aufsätze, hauptsächlich aus dem Gebiet der Reinen Mathematik.

Dresden. Rellich. 295

WILHELM **BLASCHKE,** Mathematik und Leben. (Hamburger Mathematische Einzelschriften, 27. Heft 1940.) 13 S. Leipzig und Berlin 1940, Verlag B. G. Teubner. Preis geh. 1 M.

Vergnügte Plauderei über die Mathematik und ihren Leumund.

Dresden. Rellich. 269

Dr.-Ing. EUGEN **GRÜNAGEL,** Flüssigkeitsbewegung in umlaufenden Radialrädern. (VDI-Forschungsheft 405, Beilage zu „Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens" Ausg. B. Bd. 11, November/Dezember 1940.) 21 S. m. 52 Bildern und 1 Zahlentafel. Berlin 1940, VDI-Verlag G. m. b. H. Preis 5 M.

Der erste Teil des Heftes berichtet über Versuche, die Strömung in umlaufenden Radialrädern sichtbar zu machen. Das geschieht in der bekannten Weise durch eine Versuchseinrichtung, in der Wasser mit freier Oberfläche strömt, auf die Aluminiumpulver gestreut wird. Die Aufnahmen der Strömungen in einer größeren Zahl von Pumpen- und Turbinenrädern sind sehr gut gelungen und geben ein deutliches Bild der Verhältnisse. Leider sind überhaupt keine Zahlenangaben über die Drehzahlen und Strömungsgeschwindigkeiten gemacht; es ist anzunehmen, daß diese Werte außerordentlich klein waren. Der Verfasser nimmt zwar an, daß der Einfluß der Reynoldsschen Zahl nicht sehr groß sein wird. Jedoch sind die Unterschiede gegenüber einer normalen Strömungsmaschine so groß, daß selbst die qualitative Übereinstimmung mit den hier auftretenden Strömungen nicht als sicher angenommen werden kann.

Im zweiten Teil der Arbeit wird der Versuch gemacht, die Strömungsvorgänge rechnerisch zu verfolgen, wenn in der Beschauflung Ablösungen eintreten und sich Totwasserräume bilden. Es wird für die Rechnung angenommen, daß im Schaufelkanal ein Teil von einem geordnet strömenden Flüssigkeitsstrahl und der übrige Teil von Totwasser ausgefüllt ist und daß zwischen diesen Bereichen eine eindeutige Grenze besteht. In bezug auf die Reibung in dieser Grenzfläche wird die bekannte Annahme über die turbulente Scheinreibung gemacht, die formal mit der Reibung an festen Wänden übereinstimmt. Es wird gezeigt, daß mit diesen Annahmen die Leistungsübertragung und die Verluste in der Strömungsmaschine rechnerisch verfolgt werden können, vor allem auch in den Spalten zwischen Laufrad und Leitapparat. An dieser Stelle bestanden bisher noch ganz erhebliche Unklarheiten. Über die Größe der turbulenten Scheinreibung liegen noch keine brauchbaren Meßergebnisse vor, so daß eine zahlenmäßige Anwendung der Rechnung nicht möglich ist. — Die Einheitlichkeit der Arbeit leidet etwas unter den zu häufigen Hinweisen auf andere Arbeiten des Verfassers.

Augsburg. E. Sörensen. 273

Dr. MOHAMED **HILAL,** Beiträge zur Theorie und Berechnung von Balkenbrücken aus Eisenbeton. (Mitteilungen aus dem Institut für Baustatik an der Eidg. Technischen Hochschule in Zürich, herausgegeb. v. d. Professoren Dr. M. Ritter und Dr. F. Stüssi, Mitteilung Nr. 11.) 208 S. m. 128 Abb. Zürich und Leipzig 1940, Verlag A. G. Gebr. Leemann & Co. Preis brosch. 9 M.

Die Arbeit behandelt einige Fragen, deren Klärung für die Beurteilung des Spannungs- und Verschiebungszustandes der Balkenträger für Eisenbetonbrücken nützlich ist. Die erste Untersuchung beschäftigt sich mit dem Trägerrost und der lastverteilenden Wirkung der Querträger zwischen mehreren Hauptträgern. Der Verfasser ergänzt eine kurze Schilderung der bekannten Lösungen dieses wichtigen bautechnischen Problems durch eine Ableitung der statischen Zusammenhänge nach den Ansätzen, die zur Berechnung des durchlaufenden Trägers auf elastisch senkbaren Stützen verwendet werden. Der zweite Abschnitt behandelt die Eigenspannungen des durchlaufenden Trägers mit elastisch drehbaren Stützen bei Temperaturänderung und beim Schwinden des Baustoffs. Hierbei wird auch der Unterschied des Schwindmaßes im bewehrten und unbewehrten Bereich des Trägers beachtet. Darauf folgen Untersuchungen über den Einfluß des veränderlichen Trägheitsmomentes mit verschiedener analytischer Formulierung auf die Biegemomente des beiderseits elastisch eingespannten Trägers. Zum Schluß beschäftigt sich der Verfasser mit dem Spannungszustand des durchlaufenden Trägers, ohne die für die klassische Elastizitätstheorie übliche lineare Abhängigkeit zwischen Spannung und Dehnung des Betons anzunehmen. Die Aufgaben besitzen wissenschaftliche Bedeutung. Sie sind zwar zum großen Teil bereits gelöst, von dem Verfasser jedoch eingehend behandelt und durch Tabellen, Zahlenrechnung und Beispiele erläutert worden, so daß auch das Studium dieser Ergebnisse nützlich ist.

Dresden. K. Beyer. 293

Vorspannung im Eisenbetonbau, Grundlagen, Ziel, Zweck und Anwendung. Beiträge von Prof. Dr.-Ing. L. **PISTOR,** Dipl.-Ing. R. **OPPERMANN,** Dr.-Ing. W. **PASSER,** Oberbaurat Dr.-Ing. e. h. Dr. F. v. **EMPERGER,** mit einem Geleitwort von Prof. Dr.-Ing. A. **KLEINLOGEL.** 80 S. m. 68 Textabb. Berlin 1940, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn. Preis brosch. 3,80 M.

Die Festigkeit der Trägerroste und Stabwerke aus Eisenbeton wird im konstruktiven Ingenieurbau nach den bekannten Ansätzen zur Navierschen Balkenbiegung mit versagender Zugzone des Betonquerschnitts nachgewiesen, da die ersten Zugrisse je nach der Art der Bewehrung oft bereits schon bei Bruchteilen der endgültigen Belastung eintreten. Es ist daher verständlich, daß schon seit längerer Zeit versucht worden ist, den einzelnen Bauteilen Druckkräfte durch eine Vorspannung der Rundeisen zu überlagern, um der Rißgefahr und den damit verbundenen Nachteilen vorzubeugen. Diese Bemühungen sind jedoch erst durch die Verwendung von Rundstahl mit hoher Streckgrenze erfolgreich gewesen, um bei der Vorspannung Dehnungen zu erzielen, die nicht

durch das Schwinden des Betons und das Kriechen des Baustoffs unter Last ausgeglichen werden. Diese mit der Vorspannung von Eisenbeton und mit der Verwendung von hochwertigem Baustahl verbundene theoretischen und konstruktiven Betrachtungen werden in einzelnen Aufsätzen behandelt, die bereits in Fachzeitschriften veröffentlicht oder vorgetragen worden sind. L. Pistor, München, gibt eine allgemeine Schilderung der gegenwärtig verwendeten bautechnischen Methoden. R. Oppermann, Frankfurt a. M., schildert die Versuche mit Spannbetonträgern der Bauart Freyssinet und die daraus gewonnene Erkenntnis über die Verbundwirkung von Beton und Stahl. Darauf folgt die Beschreibung der Bauausführung einer Straßenbrücke mit unterspannten Balken durch W. Passer, Berlin, in der zur statischen Berechnung und der Ausrüstung derartiger Eisenbetonkonstruktionen Stellung genommen wird. Zum Schluß erörtert F. v. Emperger, Wien, Ziel und Zweck der Vorspannung im Eisenbetonbau und die gleichzeitige Verwendung von vorgespannten und nicht vorgespannten Stabeinlagen. Der Leser gewinnt mit diesen Aufsätzen eine gute Übersicht über den gegenwärtigen Stand der Technik und die Ziele, die der Eisenbetonbau gegenwärtig zur Behebung der Rißgefahr und zur Einsparung von Baustahl verfolgt. Entscheidend ist hier jedoch nicht die Theorie, sondern die Bauausführung.

Dresden. K. Beyer. 292

Dr. phil. BRUNO **TIEDEMANN**, Über Bodenuntersuchungen bei Entwurf und Ausführung von Ingenieurbauten. 40 S. m. 22 Textabb. und 5 Tafeln. Berlin 1941, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn. Preis brosch. 2 M.

Nach der im Reichsgebiet baupolizeilich und bauverwaltungsseitig kürzlich verbindlich eingeführten „Richtlinien für die zulässige Belastung von Flach- und Pfahlgründungen" DIN 1054 sind bei allen größeren Ingenieurbauten eingehende Bodenuntersuchungen vorgeschrieben und dabei die Zuziehung einer anerkannten Versuchsanstalt oder eines anerkannten Fachmannes empfohlen worden. Der Ingenieurgeologe der Preußischen Versuchsanstalt für Wasser-, Erd- und Schiffbau, Dr. B. Tiedemann, behandelt in dem vorliegenden Heft — einem Sonderdruck aus der Zeitschrift „Die Bautechnik" — die Art dieser Gemeinschaftsarbeit zwischen Entwurfsbearbeiter und Bauleitung einerseits und der Fachstelle andererseits. Insbesondere wird der Teil der Untersuchungen besprochen, die bei Großbauten der Baustelle zufallen; das sind Bohrungen und Schürfungen, die nicht dem „Bohrmeister" allein überlassen werden dürfen, die richtige Benennung der Bodenarten nach bodenphysikalischen Gesichtspunkten, wofür Anleitungen gegeben werden, und die sachgemäße Entnahme von ungestörten Bodenproben, sowie ihre Beschriftung, Verpackung, Aufbewahrung oder Versendung, um die sich ebenfalls ein geschulter Ingenieur kümmern muß. Für Großbaustellen wird die Einrichtung einer örtlichen Bodenprüfstelle für die einfacheren Untersuchungen empfohlen und Anleitung auch dafür gegeben, um die Versuchsanstalten nicht unnütz zu belasten.

Das ausgezeichnete Heft ist aus der jahrzehntelangen Erfahrung einer führenden Erdbauversuchsanstalt entstanden und im richtigen Augenblick erschienen. Es bedarf deshalb keiner weiteren Empfehlung.

Naumburg/Saale. Dr. Scheidig. 276

GÜNTHER **BRIEGLEB**, Atome und Ionen. (Hand- und Jahrbuch der Chemischen Physik, herausgegeben von A. Eucken und K. L. Wolf, Bd. 2, Abschnitt IA.) 404 S. m. 150 Fig. im Text. Leipzig 1940, Akademische Verlagsgesellschaft Becker & Erler, Kom.-Ges. Preis brosch. 38,50 M.

Der Beitrag behandelt die allgemeinen Eigenschaften der Atome (wie Isotopie, Loschmidtsche Zahl, Atom- und Ionenradien), die Elementarteilchen (Wellen- und Teilchennatur der Materie und des Lichtes, Elektron, Positron, Proton, Neutron, Meson), die Atomkerne (Bau, Kräfte und Energien, Umwandlungen) und die Atomhülle (Einelektronensysteme, Vektormodell, Atomterme). Wenn auch für die meisten Teilgebiete schon gute zusammenfassende Darstellungen bestehen, so ist doch der vorliegende Beitrag zu begrüßen als eine Übersicht über die experimentellen Methoden und Ergebnisse des Gesamtgebietes der einfacheren Materieteilchen. Darüber hinaus bringt der Abschnitt über die Elementarteilchen viele wertvolle Zusammenstellungen über Nachweis- und Meßmethoden, die ohne ihn nur mit großer Mühe zu erhalten wären.

Leipzig. F. Hund. 271

Dr. HANS GEORG **MÖLLER**, o. Prof. a. d. Univ. Hamburg, Grundlagen und mathematische Hilfsmittel der Hochfrequenztechnik (Lehrbuch der drahtlosen Nachrichtentechnik Bd. I, herausgeg. von Nicolai v. Korshenewsky und Wilhelm T. Runge). XVI + 293 S. m. 353 Abb. Berlin 1940, Verlag Julius Springer. Preis geb. 28,80 M.

Der vorliegende Band bringt auf dem engen Raum von noch nicht 300 Seiten eine ziemlich vollständige Theorie der Hochfrequenztechnik. Nur die ausgesprochen mathematische Behandlungsweise erlaubt eine derart gedrängte und dabei exakte Darstellung eines so umfassenden Wissensgebietes. Darüber hinaus sind in einem Anhang nicht nur die komplexe Rechenweise und die Vektorenrechnung als besonderes mathematisches Werkzeug des Hochfrequenztechnikers, sondern sogar die wichtigsten Grundgesetze der Elektrizitätslehre kurz umrissen. Der Stoff des Hauptteiles beginnt mit dem einfachen Schwingungskreis und führt über die gekoppelten Kreise zu den Filtern. Es folgt, als eigenstes Arbeitsgebiet des Verfassers etwas ausführlicher behandelt, die Physik der Elektronenröhre und ihre Anwendung als Verstärker, Gleichrichter und Generator, von der ursprünglichen Rückkopplungsschaltung bis zu den Barkhausen- und Habann-Generatoren. Ein dritter Abschnitt behandelt die Antenne und die Ausbreitungsgesetze der elektromagnetischen Wellen. Der gesamte Lehrstoff ist in über 200 kleine Abschnitte und Unterabschnitte aufgeteilt. Die wichtigsten Ableitungen und Formeln sind jeweils durch kurze Zahlenbeispiele ergänzt.

Das Gesamtlehrbuch wird neben dem vorliegenden Einführungsband 5 weitere Bände umfassen, von denen der nächste, über Antennen und Wellenausbreitung, bereits erschienen ist, während die weiteren sich verteilen auf Elektronenröhren — Verstärker und Empfänger — Sender — Fernsehtechnik.

Nach wissenschaftlichen Lehrbüchern der drahtlosen Nachrichtentechnik besteht seit langem ein dringendes Bedürfnis, denn nachdem vor Jahrzehnten die ersten Lehrbücher der klassischen drahtlosen Telegraphie erschienen waren, fanden sich während der folgenden Zeit stürmischer Entwicklung kaum Autoren für eine zusammenfassende Behandlung des stark angewachsenen Gebietes. Erst in letzter Zeit ist versucht worden, diese für die Ausbildung des Ingenieurnachwuchses sehr nachteilige Lücke auszufüllen. Der Springersche Verlag bringt sein Lehrbuch als Gemeinschaftswerk mehrerer Verfasser heraus. Daß diese Schriftenreihe durch den einführenden Band eines

namhaften Physikers und Lehrers eröffnet wird, der selbst die gesamte Entwicklung des Gebietes mit erlebt und mit beeinflußt hat, bedeutet einen vielversprechenden Anfang. Ebensosehr ist es zu begrüßen, daß dem ins Breite und Einzelne gehenden Charakter des Sammelwerkes mathematische Kürze und Beschränkung auf das methodisch Wichtigste im Einführungsband die Waage hält. Diese schwierige Aufgabe ist dem Verfasser in erstaunlichem Maße gelungen. Für den Unterricht wird das Buch wertvolle Dienste leisten und dem Studierenden wie dem tätigen Ingenieur, besonders dem mathematisch begabten, von großem Nutzen sein.

Dresden. Wolman. 321

Dr. G. **JOOS,** Prof. an d. Univ. Göttingen, und Dr. TH. **KALUZA,** Prof. an d. Univ. Göttingen, Höhere Mathematik für den Praktiker, an Stelle einer 6. Aufl. des Lehrbuchs der Differential- und Integralrechnung von H. A. Lorentz. 2. verb. Aufl. XII + 368 S. m. 85 Abb. Leipzig 1940, Verlag Johann Ambrosius Barth. Preis geb. 24,50 M.

In der zweiten Auflage werden die Hyperbelfunktionen stärker berücksichtigt als bisher, neu hinzugekommen sind eine Skizze der Zylinderfunktionen (Besselsche Differentialgleichung, Reihenentwicklung, Integraldarstellung) und eine Anleitung zur formelmäßigen Darstellung praktisch wichtiger Kurven. Im übrigen sind Licht und Schatten noch so verteilt wie in der ersten Auflage. An dem Licht haben sich die erfreut, die nur an den Anwendungen der Mathematik interessiert sind, auf den Schatten haben die Mathematiker hingewiesen, z. B. R. Rothe in der Besprechung der ersten Auflage [1]). Im Vorwort der vorliegenden zweiten findet sich nun eine Bemerkung, die an die Rothesche Kritik anknüpft, aber an ihrem Kern vorbeigeht: Rothe hat keineswegs bemängelt, daß die Verfasser dem Praktiker Existenzbeweise vorenthalten wollen, sondern vielmehr, daß dem Leser ein in wesentlichen Punkten unvollständiger „Beweis" der Gleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ als stichhaltig vorgesetzt wird, und das ist wirklich eine — noch dazu ganz überflüssige — Unkorrektheit, die mit der Sünde, eine Näherungsformel außerhalb ihres Gültigkeitsbereiches anzuwenden, durchaus vergleichbar ist!

Freiberg/Sa. Grüß. 297

1) Z. angew. Math. Mech. Bd. 18 (1938), S. 315 bis 316.

Dr.-Ing. e. h. Dr. techn. e. h. FRITZ **EMDE,** Prof. a. d. Techn. Hochschule Stuttgart, Tafeln elementarer Funktionen. XII + 181 S. m. 83 Textfig. Leipzig und Berlin 1940, Verlag B. G. Teubner. Preis geb. 12 M.

In der dritten Auflage der allbekannten Funktionentafeln von Jahnke und Emde sind die elementaren Funktionen ausgeschieden worden. Die dadurch entstandene Lücke hat der Herausgeber durch ein neues Werk geschlossen, das den elementaren Funktionen eine umfangreiche und vielfach neuartige Behandlung und Darstellung zuteil werden läßt. Von den Inhaltserweiterungen gegenüber der zweiten Auflage der Funktionentafeln mögen hier die folgenden aufgeführt werden: Die Faktorentafel, die eine Zerlegung der natürlichen Zahlen bis zu 10^4 leistet; Lösungsverfahren für die Gleichungen zweiten bis vierten Grades mit ausführlichen Anleitungen und graphischen Darstellungen; neue umfangreichere Tafeln für die Kreis- und Hyperbelfunktionen; Tafeln und Figuren zur Ermittlung der Stromverdrängung; Kurvenbilder der Tschebyschewschen Polynome; ein logarithmisches Diagramm der mechanischen Einheiten; und schließlich die sehr beachtenswerten Ausführungen über Zahlenrechnungen. Darüber hinaus aber wird dem Benutzer auch in den übernommenen und ausgestalteten Teilen noch vieles andere Neue und Wichtige dargeboten.

Die Bezeichnungsweise ist sorgfältig gewählt; nur müßte es auf S. 160 unten folgerecht „Kehrwert" statt „Umkehrung" heißen.

Das Werk besitzt die bekannten Vorzüge der Funktionentafeln in erhöhtem Maße; dazu trägt auch das größere Format bei, das der Deutlichkeit der Formeln und der Figuren zugute kommt. Das Buch ist ein gediegenes Anschauungs- und Rechenhilfsmittel auf allen Anwendungsgebieten der Mathematik.

Dresden. P. E. Böhmer. 288

Grund- und Zeitfragen der Versicherungswirtschaft und Versicherungswissenschaft. (Schriftenreihe des Instituts für Versicherungswissenschaft der Universität Köln, Bd. 1.) Herausgegeben von Prof. Dr. Walther Rohrbeck. 124 S. Berlin 1941, Verlag Julius Springer. Preis brosch. 6,40 M.

Das 124 Seiten starke Heft enthält die Vorträge, die bei der Eröffnung des Instituts für Versicherungswissenschaft an der Universität Köln gehalten wurden. Diese Vorträge lassen die Wandlungen erkennen, welche die Auffassungen über Gegenstand und Ziel der behandelten Wissenschaftsgebiete im Laufe der letzten Jahre erfahren haben.

Dresden. P. E. Böhmer. 289

U. **PESONEN,** Messungen der Grundlinien Örebro und Värnamo in Schweden im Jahre 1938. (Baltische Geodätische Kommission, Sonderveröffentlichung Nr. 8.) 26 S. Helsinki 1941.

Einer Anregung der Baltischen Geodätischen Kommission entsprechend wurden im Sommer 1938 unter der Leitung von J. Bonsdorff zwei Grundlinien gemessen; die eine in der Nähe der Stadt Örebro, die andere südlich von der Stadt Värnamo. Die Beobachter waren U. Pesonen und P. Kalaja vom Finnischen Geodätischen Institut.

Die Eichung der benützten 24 m langen Invardrähte erfolgte vor und nach der Messung der Grundlinien auf der bei Nummela in Finnland gelegenen, 36 Drahtlängen großen Eichstrecke. Die Grundlinie bei Örebro ist etwas mehr als 7 km lang; diejenige bei Värnamo ist nicht ganz 7 km lang. Für die Messungen wurden acht Invardrähte des Finnischen Geodätischen Instituts verwendet. Die mittleren Fehler der beiden rund 7 km langen Grundlinien liegen zwischen ± 1,0 und ± 1,5 mm.

Stuttgart. P. Werkmeister. 290

Tafeln zur Übertragung geographischer Koordinaten auf dem internationalen Erdellipsoide im Bereich 35° bis 71° Breite. (Baltische Geodätische Kommission, Sonderveröffentlichung Nr. 9.) 53 S. m. Auszug. Helsinki 1941.

Die von der Baltischen Geodätischen Kommission als Sonderveröffentlichung Nr. 9 herausgegebenen Tafeln beziehen sich auf die geodätische Hauptaufgabe, bei der es sich um die Übertragung von geographischen Koordinaten auf dem Erdellipsoid mit Hilfe einer geodätischen Linie von bekannter Richtung und Länge handelt. Die Tafeln gelten für das Internationale Erdellipsoid mit der großen Halbachse gleich 6 378 388 m und der Abplattung 1 : 297. Unter den verschiedenen

Formeln für die Koordinatenübertragung wurden die „alten, gut bewährten und in den meisten Staaten wohl angewandten" Formeln von O. Schreiber mit den von L. Krüger angegebenen Abänderungen gewählt.

Stuttgart. P. Werkmeister. 291

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Mitteilungen der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, Nr. 1, 20. Januar 1941. 35 S. Zürich 1941.

B. N. **DELONE** und D. K. **FADDEEW,** Theorie der Irrationalitäten dritter Stufe. (Arbeiten des mathematischen Institutes B. W. A. Steklow XI.) 340 S. Moskau und Leningrad 1940, Verlag Akademie der Wissenschaften, USSR. Preis 30 Rubel.

Dr C. **KLOUČEK,** Das Prinzip der fortgeleiteten Verformung als Weg zur Ausschaltung der Unbekannten aus dem Formänderungsverfahren. 391 S. Berlin 1941, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn. Preis brosch. 18 M.

J. P. **AREND,** Die wirkliche Mechanik des Geschehens im Lebenden und Toten. 456 S. Zürich und Leipzig 1941, Rascher Verlag. Preis geb. 10 M.

Dr. CLEMENS **SCHAEFER,** o. ö. Prof. der Physik a. d. Univ. Breslau, Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. 4. verb. Aufl. 142 S. m. 33 Textfig. Berlin 1941, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 6 M.

Prof. G. **MAHLER,** Physikalische Formelsammlung. Neubearbeitet von Prof. K. Mahler, Studienrat a. d. Schubartoberschule Aalen in Württemberg. 7. verb. Aufl. (Sammlung Göschen Bd. 136). 152 S. m. 69 Fig. Berlin 1941, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 1,62 M.

Dr.-Ing. habil. FRANZ **KARAS,** Elastische Formänderung und Lastverteilung beim Doppeleingriff gerader Stirnradzähne. (VDI-Forschungsheft 406, Beilage zu „Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens", Ausgabe B, Bd. 12, Januar/Februar 1941.) 23 S. m. 13 Bildern und 4 Zahlentafeln. Berlin 1941, VDI-Verlag G. m. b. H. Preis brosch. 5 M.

Dr.-Ing. BRUNO **ECK,** Technische Strömungslehre. VIII + 252 S. m. 278 Abb. Berlin 1941, Verlag Julius Springer. Preis geb. 13,50 M.

NACHRICHTEN

Arbeitstagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Jena.

Vom 19. bis zum 24. Oktober 1941 fand in Jena eine überaus gut besuchte Arbeitstagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung statt. In der Gruppe „Angewandte Mathematik" wurden die folgenden Vorträge gehalten:

E. Hölder (Braunschweig): Grundsätzliches über die Behandlung der Anfangs- und Randbedingungen bei einer nicht linearen hyperbolischen Differentialgleichung mit zwei unabhängigen Veränderlichen (an Beispielen der Gasdynamik),

W. Damköhler (Jena) u. H. Grell (Augsburg): Zur Integration der Differentialgleichung der stationären ebenen adiabatischen Gasströmung,

E. Hopf (Leipzig): Mathematische Grundprobleme der Hydrodynamik,

G. Schulz (Berlin): Wahrscheinlichkeiten abhängiger Ereignisse,

H. Gebelein (Eßlingen): Anwendung der Kombinatorik auf den Aufbau der Statistik,

H. Hornich (Wien): Zur Theorie des Risikos,

K. Ludwig (Hannover): Zur Biegung des Kreisringausschnittes,

A. Walther (Darmstadt): Neuere Verfahren der praktischen Mathematik,

L. Vietoris (Innsbruck): Zur Theorie des Integraphen,

Th. Zech (Darmstadt): Zum Abklingen von nicht linearen Schwingungen,

L. Collatz (Karlsruhe): Natürliche Schrittweite bei numerischer Integration von Differentialgleichungssystemen,

L. Collatz (Karlsruhe): Eigenwertberechnung bei Gleichungen der Form $L(f) + \lambda M(f) = 0$,

K. Bögel (Blankenfelde): Gedämpfte harmonische Schwingungen unter Einfluß der trockenen Reibung,

Bückner (Berlin): Näherungslösungen der linearen Differentialgleichung erster Ordnung.

Auch in den anderen Gruppen wurden eine Reihe von Fragen behandelt, die für den für die Anwendungen interessierten Mathematiker von Wichtigkeit sind. Erwähnt seien vor allem die Vorträge von

E. Kamke (Tübingen): Zur Festlegung und Berechnung der Eigenwerte bei gewöhnlichen Differentialgleichungen durch die sog. direkten Methoden der Variationsrechnung,

F. Rellich (Dresden): Vollständigkeit gestörter Eigenfunktionen,

K. Schröder (Berlin): Untersuchungen über biharmonische Funktionen: Zur allgemeinen Theorie der ebenen und räumlichen biharmonischen Randwertaufgabe; die Randwertaufgabe für die rechteckige Kontur,

J. L. Krames (Wien): Über die geometrischen Grundlagen der Luftphotogrammetrie.

Am Mittwoch Nachmittag fand die Jahresversammlung des Mathematischen Reichsverbandes statt, in der insbesondere die Richtlinien für die Ausbildung der Diplom-Mathematiker besprochen wurden, über die Herr Oberregierungsrat Dr. Führer berichtete. 320

Persönliches.

Der außerplanmäßige Prof. a. d. Univ. Göttingen Dr. Maximilian Schuler wurde zum a. o. Prof. für angewandte Mechanik ernannt.

Der Dozent a. d. Techn. Hochschule Brünn Dr. W. v. Koppenfels wurde zum a. o. Prof. der Mathematik an dieser Hochschule ernannt.

Am 26. April 1941 verstarb der o. Prof. für Strömungslehre und angewandte Mathematik, Direktor des Aerodynamischen Institutes der Techn. Hochschule Aachen C. Wieselsberger.

Ferner verstarb in Berlin-Lichterfelde der frühere Observator und Prof. am Astronomischen Recheninstitut der Universität Berlin Dr. Jean Peters, der Herausgeber bekannter Tafelwerke.

Für den Textteil verantwortlich: Professor Dr. Fr. A. Willers, Dresden-A. 20, Dorotheenstr. 12. — Printed in Germany. —
Copyright 1939 by VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7.
— Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz

XUM